TP N° 8 – Derivadas direccionales – Planos tangentes y rectas normales

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018).

1. *Temario*

- Derivada Direccional – Gradiente
- Ecuación del Plano Tangente – Recta Normal a la Superficie

2. *Resumen teórico*

Derivada direccional

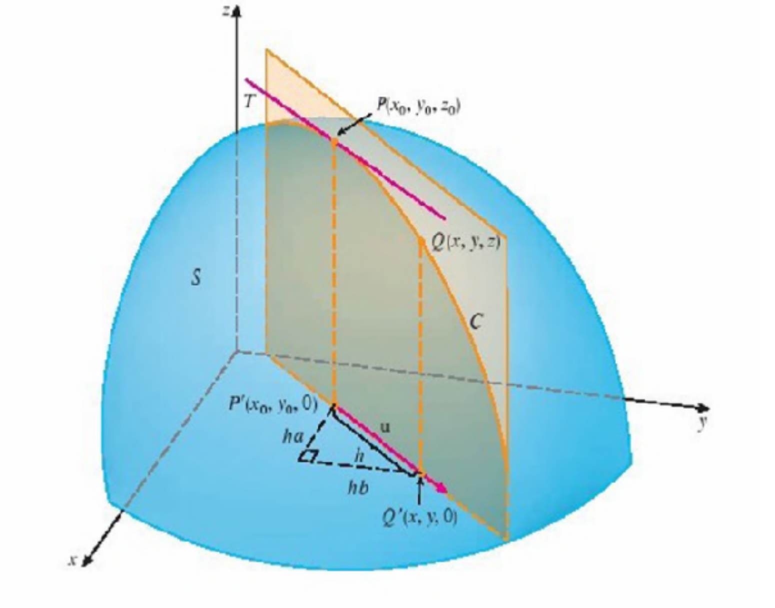
Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable de dos variables independientes y sea $\boldsymbol{u} = a\,\boldsymbol{i} + \mathrm{b}\,\boldsymbol{j}$ un vector unitario (o *versor*).

La derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto $(x_0\,, y_0)$, en la **dirección** y el **sentido** del versor $\boldsymbol{u}$, se define mediante el siguiente límite:

$$D_{\boldsymbol{u}}\, f(x_0\,, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha\,;\, y_0 + hb) - f(x_0\,, y_0)}{h}$$

si dicho límite existe. La derivada direccional de una función calculada en un punto de su dominio es una magnitud escalar.

Interpretación geométrica de la derivada direccional



Teorema para el cálculo de la derivada direccional

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de dos variables independientes y $\boldsymbol{u} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j}$ es un vector unitario, entonces la derivada direccional de la función se calcula mediante:

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} b$$

A su vez, definiendo al ***vector gradiente*** de $f(x, y)$ a la función vectorial dada por:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \boldsymbol{j}$$

resulta la derivada direccional en términos del gradiente:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) . \boldsymbol{u}$$

Generalización a tres variables

Si $w = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de tres variables independientes y $\boldsymbol{u} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$ es un vector unitario, entonces la derivada direccional de la función se calcula mediante:

$$D_u f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} b + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} c$$

A su vez, definiendo vector gradiente de $f(x, y, z)$ a la función vectorial dada por:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

resulta la derivada direccional en términos del gradiente:

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) . \boldsymbol{u}$$

Teorema del gradiente

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes que es diferenciable en (x, y).

i) El valor máximo de $D_u f(x, y)$ en el punto P (x, y) es $\|\nabla f(x, y)\|$ calculado en el punto.

ii) La tasa de crecimiento máxima de $f(x, y)$ en P(x, y) se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y)$.

iii) La tasa de decrecimiento máximo de $f(x, y)$se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x, y)$.

Generalización a tres variables

Sea $w = f(x, y, z)$ una función de tres variables independientes que es diferenciable en (x, y, z).

i) El valor máximo de $D_u f(x, y, z)$ en P(x, y, z) es $\|\nabla f(x, y, z)\|$ calculado en el punto.

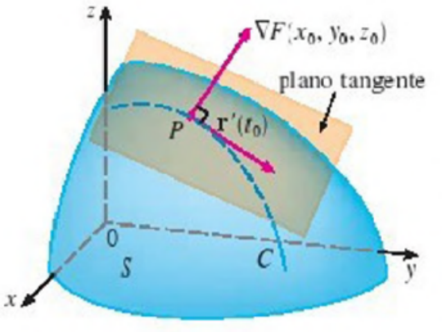
ii) La tasa de crecimiento máxima de $f(x, y, z)$ en P(x, y, z) se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y, z)$.

iii) La tasa de decrecimiento máximo de $f(x, y, z)$ en P(x, y, z) se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x, y, z)$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies

Sea $\boldsymbol{S}$ una superficie que es la gráfica de una función de dos variables independientes, definida implícitamente mediante la ecuación F(x, y, z) = 0 y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre $\boldsymbol{S}$.

Si F(x, y, z) es una función con derivadas parciales continuas y sus derivadas parciales no son todas nulas en (x_0, y_0, z_0) , entonces el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente a $\boldsymbol{S}$ en P_0.



En consecuencia el **plano tangente** a la gráfica de $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene como ecuación:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

y la recta normal tendrá por *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0).\,t \\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0).\,t \\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0).\,t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

ó las *ecuaciones cartesianas* [en el caso que ninguna de las derivadas parciales se anule en (x_0, y_0, z_0)]

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} = t$$

Si $\boldsymbol{S}$ viene dada por la función $z = f(x, y)$ definida explícitamente, tomando $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, resulta que el **vector normal** tiene la siguiente ecuación:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

Y el **plano tangente** a la gráfica $\boldsymbol{S}$ representativa de $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene como ecuación:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

y la **recta normal** tendrá por *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(x_0, y_0).\,t \\ y = y_0 + f_y(x_0, y_0).\,t \\ z = z_0 - t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

ó las *ecuaciones cartesianas* [en el caso que ninguna de las derivadas parciales se anule en (x_0, y_0)]

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Curvas y superficies de nivel

Sea $F(x, y, z)$ una función de tres variables independientes, diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y sea $\boldsymbol{S}$ la superficie de nivel que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Si $\boldsymbol{\nabla}F(x_0, y_0, z_0) \neq \boldsymbol{0}$, entonces el vector gradiente es normal a $\boldsymbol{S}$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables independientes, diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$ y sea $\boldsymbol{C}$ la curva de nivel que contiene a $P_0(x_0, y_0)$. Si $\boldsymbol{\nabla}F(x_0, y_0) \neq \boldsymbol{0}$, entonces el vector gradiente es normal a $\boldsymbol{C}$ en $P_0(x_0, y_0)$.

3. *Ejercicios resueltos*

1) **Dada $\boldsymbol{z = f(x, y)}$. Demostrar que las derivadas parciales son casos particulares de la derivada direccional.**

Sea $\boldsymbol{u} = 1\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j}$, entonces *a* = 1 y *b* = 0. Aplicando la definición de derivada direccional:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se tendrá:

$$D_i f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\boxed{D_i f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)}$$

Del mismo modo, si $\boldsymbol{u} = 0\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j}$, entonces *a* = 0 y *b* = 1.
Se tendrá:

$$D_j f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\boxed{D_j f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)}$$

2) **Dada $\boldsymbol{z = x^3 - 3xy + 4y^2}$, calcule la derivada direccional en un punto genérico de su dominio, en la dirección del vector que forma un ángulo $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}$ con el eje x, mediante el teorema de las derivadas parciales. Luego, evalúela en el punto $\boldsymbol{(1, 2)}$.**

En primer lugar verificamos que z es una función diferenciable por ser de tipo polinomial. Entonces se puede aplicar el teorema indicado y resulta:

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, a + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, b$$

Las derivadas parciales serán:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y \;\; ; \;\; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x + 8y$$

En segundo lugar, obtenemos las componentes del vector unitario correspondiente a la dirección de derivación:

$$a = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; ; \;\; b = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\boxed{D_u f(x, y) = (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\,\frac{1}{2}}$$

Finalmente en el punto $(1,2)$:

$$D_u f(1,2) = (3 - 3.2)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3 + 8.2)\frac{1}{2}$$

$$\boxed{D_u f(1,2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}}$$

3) **Dada $z = x^2y^3 - 4y$, calcule la derivada direccional en el punto $(2,-1)$ en la dirección del vector no unitario $v = 2\,i + 5\,j$, mediante el vector gradiente.**

En primer lugar verificamos que z es una función diferenciable por ser de tipo polinomial. Entonces se puede aplicar el teorema y resulta:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\boldsymbol{u}$$

con $\boldsymbol{u}$ vector unitario, es decir que su módulo vale 1.

Calculamos el vector gradiente:

$$\nabla f(x,y) = 2xy^3\boldsymbol{i} + (3x^2y^2 - 4)\boldsymbol{j}$$

y en el punto $(2,-1)$:

$$\nabla f(2,-1) = -4\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$$

Como $\boldsymbol{v}$ no es unitario ya que $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{29}$, calculamos el vector unitario $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{j}$$

Por lo tanto:

$$D_u f(2,-1) = \nabla f(2,-1).\boldsymbol{u} = < -4\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j} > . < \frac{2}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{j} > = \frac{-4.2 + 8.5}{\sqrt{29}}$$

$$\boxed{D_u f(2,-1) = \frac{32}{\sqrt{29}}}$$

4) **Dada $w = x\sin(yz)$, calcule la derivada direccional en el punto $(1,3,0)$ en la dirección del vector no unitario $v = i + 2\,j - k$, mediante el vector gradiente.**

Como la función w es diferenciable (la justificación queda para el alumno), se puede aplicar el teorema para el caso de funciones de tres variables.

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).\boldsymbol{u}$$

El gradiente es:

$$D_u f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\,\boldsymbol{j}\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$$

$$D_u f(x,y,z) = \sin(yz)\,\boldsymbol{i} + xz\cos(yz)\,\boldsymbol{k} + xy\cos(yz)\,\boldsymbol{k}$$

En el punto $(1,3,0)$ será:

$$D_u f(1,3,0) = 0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}$$

El vector unitario será:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$$

Por lo tanto:

$$D_u f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0).\boldsymbol{u} = (0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}).\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}\right) = 3.\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\boxed{D_u f(1,3,0) = -\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

5) **Para la función del ejercicio 3, encontrar la dirección en la que la función aumenta más rápidamente en el punto $P(2,-1)$ y la tasa máxima de crecimiento en dicho punto.**

Ya se vio que la función en estudio es diferenciable. En consecuencia, es aplicable el **Teorema del Gradiente** y la dirección en la que la función aumenta más rápidamente es la dirección del gradiente en dicho punto, es decir en la dirección:

$$\boxed{\nabla f(2,-1) = -4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}}$$

Para indicar dicha dirección mediante un vector unitario (*versor*) debe dividirse el $\nabla f\ (2,-1)$ por su módulo:

$$|\nabla f\ (2,-1)| = \sqrt{80}$$

Por lo tanto puede escribirse el siguiente vector unitario:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\nabla f\ (2,-1)}{|\nabla f\ (2,-1)|} = \frac{-4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}}{\sqrt{80}} = \frac{-4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (-1\ \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$$

Además, la tasa máxima de crecimiento de la función en el punto indicado será:

$$|\nabla f(2,-1)| = |-4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

$$\boxed{|\nabla f(2,-1)| = 4\sqrt{5}}$$

El valor anterior puede verificarse calculando la derivada dirección en la dirección y el sentido de $\vec{\boldsymbol{u}}$:

$$D_{\vec{u}} f(2,-1) = \nabla f\ (2,-1).\vec{\boldsymbol{u}} = (-4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}).\frac{1}{\sqrt{5}}\ (-1\ \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) = \frac{4 + 16}{\sqrt{20}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} = |\nabla f(2,-1)|$$

6) **Determine las ecuaciones del plano tangente y recta normal en el punto $P(-2,1,-3)$ al elipsoide escaleno de ecuación:**

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

El elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función:

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Por lo tanto:

$F_x(x,y,z) = \frac{x}{2}$, $F_y(x,y,z) = 2y$, $F_x(x,y,z) = \frac{2z}{9}$

$F_x(-2,1,-3) = -1$, $F_y(-2,1,-3) = 2$, $F_x(-2,1,-3) = -\frac{2}{3}$

Por lo tanto, considerando la ecuación del plano tangente dada por:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$$

Resulta: $$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0$$

o simplificando: $$\boxed{3x - 6y + 2z + 18 = 0}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta normal serán:

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - \frac{2}{3}t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

y sus ecuaciones cartesianas:

$$\frac{z+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}} = t$$

7) **Hallar la ecuación del plano tangente y la recta normal al paraboloide elíptico de ecuación:**

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

en el punto $P(1,1,\frac{1}{2})$.

Calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$:

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{5}$$
$$f_y(x,y) = -\frac{4y}{5}$$

Las evaluamos en $(1,1)$

$$f_x(1,1) = -\frac{1}{5}$$
$$f_y(1,1) = -\frac{4}{5}$$

La ecuación del plano tangente será:

$$f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

o sea:

$$-\frac{1}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y-1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Que desarrollando resulta:

$$\boxed{-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y - z + \frac{3}{2} = 0}$$

y la recta normal tendrá por ecuaciones paramétricas :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{5}t \\ y = 1 - \frac{4}{5}t \\ z = \frac{1}{2} - t \end{cases} \text{, con } t \in \mathbb{R}}$$

ó las ecuaciones cartesianas:

$$\boxed{\frac{x-1}{-\frac{1}{5}} = \frac{y-1}{-\frac{4}{5}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1}}$$

4. *Ejercicios de aplicación*

1. **Dirección de máximo crecimiento de la temperatura**

La temperatura en grados Celsius de la superficie de una placa metálica está dada mediante la función:

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección crece más rápidamente la temperatura en el punto $(2, -3)$? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la temperatura en la dirección hallada?

El gradiente de la temperatura está dado por:

$$\nabla T(x, y) = T_x(x, y)\boldsymbol{i} + T_y(x, y)\boldsymbol{j} = -8x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$$

El gradiente de temperatura en el punto indicado será:

$$\nabla T(2, -3) = -16\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$$

Por lo tanto la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto $(2, -3)$, dada mediante un vector unitario será:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\nabla f(2, -3)}{|\nabla f(2, -3)|} = \frac{-16\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}}{\sqrt{292}}$$

La tasa máxima de crecimiento de la temperatura se determina mediante el cálculo de la derivada direccional en la dirección y sentido de $\boldsymbol{u}$ y deberá ser igual al módulo del gradiente en el punto $(2, -3)$.

$$D_{\boldsymbol{u}} f(2, -3) = \nabla f(2, -3) . \boldsymbol{u} = (-16\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}) . \frac{1}{\sqrt{292}} (-16\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}) = \frac{256 + 36}{\sqrt{292}} = \sqrt{292} = |\nabla f(2, -3)|$$

NOTA IMPORTANTE: la resolución de este ejercicio puede inducir a confusión. Si bien el gradiente calculado apunta en la dirección de máximo crecimiento de la temperatura, no tiene por qué apuntar hacia el punto más caliente de la placa.
El gradiente da la solución local al problema de encontrar el crecimiento máximo de la temperatura en el punto indicado. Pero si se abandona dicho punto y se pasa a otro en el dominio de la función, la dirección de máximo crecimiento y, por lo tanto, la tasa de variación respectiva pueden cambiar.

2. **Trayectoria de un rastreador térmico**

Un rastreador térmico, en un instante de su movimiento, se encuentra en el punto $(2, -3)$ de una placa metálica cuya temperatura en un punto genérico (x, y) está dada por la función:

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

conforme se va moviendo en la dirección de máximo crecimiento de la temperatura.

Para resolver el problema se tendrán en cuenta los resultados obtenidos en el ejercicio anterior.

Se representa la trayectoria del rastreador térmico mediante una función vectorial:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

Un vector tangente a la trayectoria del rastreador en cada punto (x, y) de la placa estará dado por otra función vectorial:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{dx(t)}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy(t)}{dt}\boldsymbol{j}$$

Dado que el rastreador busca el máximo crecimiento de la temperatura, las direcciones de $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{\nabla} T(x, y) = -8x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$ deberán ser las mismas en todo punto de la trayectoria del rastreador. Por lo tanto se cumplirán las siguientes igualdades:

$$-8x = k\frac{dx}{dt} \;\; ; \;\; -2y = k\frac{dy}{dt}$$

Siendo *k* depende de t. Despejando en cada ecuación la razón $^{dt}/_{k}$ e igualando se llega a lo siguiente:

$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden, en variables separables, cuya solución es:

$$x = C\, y^4$$

Considerando la condición inicial de que el rastreador parte del punto $(2, -3)$ el valor de la constante ha de ser:

$$C = {}^{2}/_{81}$$

En consecuencia la trayectoria del rastreador térmico será:

$$x = \frac{2}{81}\, y^4$$

3. **Vector Intensidad de campo eléctrico**

Dada la función potencial V determinar el vector intensidad de campo eléctrico en el punto P(1,1,1).

$$V(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$$

El vector Intensidad de campo eléctrico es igual al gradiente de potencial cambiado de signo. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = -\boldsymbol{\nabla} V(x, y, z)$$

El gradiente es una función vectorial cuyas componentes son, respectivamente, las derivadas parciales de la función potencial.

$$\boldsymbol{\nabla} V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = -6xz \;\; ; \;\; \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = -6yz \;\; ; \;\; \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = 6z^2 - 3(x^2 + y^2)$$

Calculadas en el punto (1, 1, 1) se obtienen los siguientes valores:

$$\frac{\partial V(1,1,1)}{\partial x} = -6 \;\; ; \;\; \frac{\partial V(1,1,1)}{\partial y} = -6 \;\; ; \;\; \frac{\partial V(1,1,1)}{\partial z} = 3$$

Por lo tanto la intensidad de campo eléctrico será:

$$\boldsymbol{E}(1,1,1) = -\boldsymbol{\nabla} V(1,1,1) = 6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

4. **Topografía**

La superficie de una montaña admite como modelo matemático la ecuación:

$$h(x, y) = 4000 - 0{,}001x^2 - 0{,}004y^2$$

Si un montanista se encuentra en el punto $(500, 300, 3390)$ hallar la dirección en que debe moverse si desea ascender con la mayor rapidez posible.

Para que el montañista ascienda con la mayor rapidez posible, a partir del punto en que se encuentra, deberá seguir la dirección de máximo crecimiento de la superficie, dirección que coincide con la del gradiente de la función $h(x, y)$.

$$\nabla h(x,y) = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = -0{,}002x \;;\; \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = -0{,}008y$$

Por lo tanto:

$$\nabla h(x,y) = -0{,}002x\boldsymbol{i} - 0{,}008y\boldsymbol{j}$$

En el punto indicado:

$$\nabla h(500{,}300) = -0{,}002.500\boldsymbol{i} - 0{,}008.300 = -1\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j}$$

Si se desea dar la dirección mediante un vector unitario, se divide el vector gradiente hallado por su módulo:

$$|\nabla h(500{,}300)| = \sqrt{1 + (2{,}4)^2} = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6$$

Por lo tanto la dirección buscada puede darse mediante:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\nabla h\,(500,300)}{|\nabla f\,(500,300)|} = \frac{-1\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j}}{\sqrt{6{,}76}}$$

5. *Ejercicios propuestos*

1) **Encontrar el gradiente de la función dada en el punto indicado y representarlo gráficamente**:

a. $f(x,y) = x^2 - 4xy$, $P(1,2)$.

b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(-4,3)$.

c. $f(x,y) = e^{3x}.tg\,y$, $P(0,\pi/4)$.

d. $f(x,y,z) = yz^3 - 2x^2$, $P(2,-3,1)$.

2) **Calcular la derivada direccional de la función dada en el punto P y en la dirección indicados:**

a. $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$, $P_0(3,-1)$; $\boldsymbol{u} = (\sqrt{2}/2)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$

b. $f(x,y) = arctg\,(y/x)$, $P_0(4,-4)$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

c. $f(x,y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$, $P_0(3,-2)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

d. $f(x,y) = x\cos^2 y$, $P_0(2,\pi/4)$, $\boldsymbol{a} = 5\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

e. $f(x,y) = x^3y^2$, $P_0(-1,2)$, $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

f. $f(x,y,z) = xy^3z^2$, $P_0(2,-1,4)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$

g. $f(x,y,z) = z^2e^{xy}$, $P_0(-1,2,3)$, $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$

h. $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\,.\,sen\,z$, $P_0(4,9,\pi/4)$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

3) **En las funciones indicadas a continuación**:

- Calcular la derivada direccional de $f(x,y)$, o de $f(x,y,z)$ según corresponda, en el punto P y en la dirección y sentido de P a Q.
- Obtener un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de $f(x,y)$, o de $f(x,y,z)$ según corresponda, en el punto P y calcular la tasa de crecimiento de la función en esa dirección.

- Obtener un vector unitario en la dirección en la que $f(x,y)$ o de $f(x,y,z)$, según corresponda, disminuye más rápidamente (máximo decrecimiento) en P y calcular la razón de cambio de la función en esa dirección.

a. $f(x,y) = x^2 - 4xy$, P (1,2) , Q (5,-2).

b. $f(x,y) = x^2 e^{-2y}$, P (2,0) , Q (−3,1).

c. $f(x,y) = sen\,(2x - y)$, P (−π/3 , π/6) , Q (0,0).

d. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, P (−2,3,1) , Q (0, −5, 4).

4) **Dada la función potencial V(x, y) determinar el vector intensidad de campo eléctrico en el punto P(3, 4, 0)**:

$$V(x,y) = ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

5) **En una cierta región del espacio, el potencial eléctrico está dado por la función**:

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Determine la razón de cambio del potencial en el punto P (3, 4, 5) y en la dirección y sentido del vector:

$$\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

b) ¿En qué dirección V cambia con mayor rapidez en P?

c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio de V en P?

6) **La temperatura en el punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de una placa metálica está dada por la función**:

$$T(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Hallar la dirección de máximo crecimiento y la tasa de variación de la temperatura para dicha dirección en el punto P(3, 4).

7) **La temperatura en el punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de una placa metálica está dada por la función**:

$$T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

donde T se mide en ºC y x, y, z en metros.

a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto P (2, −1, 2) y en la dirección y sentido hacia el punto Q (3, −3, 3).
b) ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápidamente en el punto P?
c) ¿En qué dirección la temperatura disminuye más rápidamente en el punto P?
d) ¿En qué dirección la temperatura no se modifica en el punto P?

8) **Obtener ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto indicado** (en cada caso verificar previamente que el punto indicado pertenece a la superficie):

a. $\left(\frac{3}{4}\right)x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$, P (2,1, $\sqrt{6}$)

b. $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10$, P (2, −3, 1)

c. $z = 4x^2 + 9y^2$, P(−2, −1, 25)

d. $xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0$, P (−5, 5, 1)

e. $z = 2\,e^{-x}.\cos y$, $P\,(0, \pi/3, 1)$

9) Hallar los puntos del hiperboloide de ecuación: $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 5$.

10) Encuentre los puntos del paraboloide $z = 4x^2 + 9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por $P(-2, 4, 3)$ y $Q(5, -1, 2)$.

6. *Bibliografía*

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Matemática Superior para Ingenieros y Físicos, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff