# TP N° 7 – Funciones Vectoriales

***Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018)***

## 1. *Temario*

- Parametrización de curvas
- Funciones vectoriales
- Posición, velocidad y aceleración
- Longitud de arco
- Sistema de coordenadas intrínsecas - Curvatura

## 2. *Resumen teórico*

### *Ecuaciones paramétricas de una curva*

Una parametrización de una curva $\mathcal{C}$ en el espacio la constituyen las ecuaciones:

$$x = f(t); y = g(t); z = h(t) \text{ con } t \in D \subset \mathbb{R},$$

donde $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son funciones continuas en D, si todos los puntos de $\mathcal{C}$ se obtienen para algún valor de $t \in D$.

$\mathcal{C}$ es regular (o alisada) si además de tener una parametrización como la indicada, $f'(t)$, $g'(t)$y $z'(t)$ son funciones continuas y no se anulan simultáneamente, excepto posiblemente en los extremos.

Si $\mathcal{C}$ es regular, para $a \leq t \leq b$, y no se corta a sí misma –excepto posiblemente en los extremos– su longitud de arco **L** es:

$$\boldsymbol{L} = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

### *Función vectorial*[1]

$$\boldsymbol{r}: D \subset \mathbb{R} \to V^3$$

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

donde $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son funciones escalares de una sola variable real t, con dominio D.

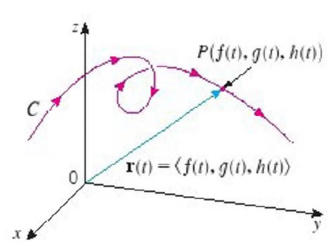



**FIGURA 1**
*C* está trazada por la punta de un vector de posición $\mathbf{r}(t)$.

[1] Se utilizarán letras en negrita para indicar funciones vectoriales y/o vectores.

## *Límite de una función vectorial*

$$\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = [\lim_{t\to a} f(t)]\boldsymbol{i} + [\lim_{t\to a} g(t)]\boldsymbol{j} + [\lim_{t\to a} h(t)]\boldsymbol{k},$$

siempre y cuando $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ tengan límites cuando $t \to a$.

## *Continuidad de una función vectorial*

$$\boldsymbol{r}(t) \text{ es continua en } \mathrm{t = a} \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(a)$$

$$\boldsymbol{r}(t) \text{ es continua en } \mathrm{t = a} \Leftrightarrow f(t), g(t) \text{ y } h(t) \text{ son continuas en } \mathrm{t = a}$$

## *Derivada de una función vectorial*

La derivada de una función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ es otra función vectorial $\boldsymbol{r}'(t)$ definida por:

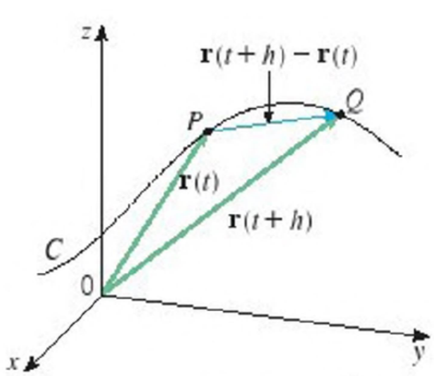
$$\boldsymbol{r}'(t) = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{1}{\mathrm{h}}[\boldsymbol{r}(t+\mathrm{h}) - \boldsymbol{r}(t)], \forall\, t \text{ en que el límite } \exists$$

**Teorema:**

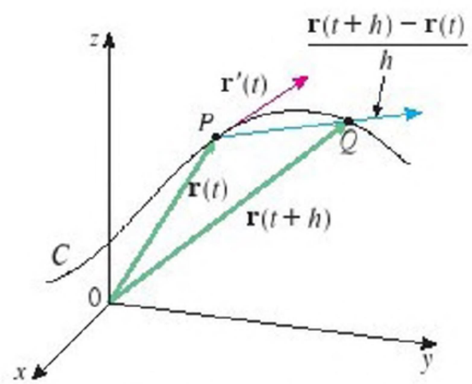
Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$son funciones derivables, entonces la derivada de $\boldsymbol{r}(t)$ es:

$$\boldsymbol{r}'(t) = f'(t)\boldsymbol{i} + g'(t)\boldsymbol{j} + h'(t)\boldsymbol{k}$$

**Interpretación geométrica de la derivada**:



a) Vector secante $\overrightarrow{PQ}$



b) Vector tangente $\mathbf{r}'(t)$

**Propiedad**

Si $|\boldsymbol{r}(t)| = c\ (constante)$, entonces $\boldsymbol{r}'(t) \perp \boldsymbol{r}(t)$.

## *Integral definida de una función vectorial*

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \left[\int_a^b f(t).dt\right]\boldsymbol{i} + \left[\int_a^b g(t).dt\right]\boldsymbol{j} + \left[\int_a^b h(t).dt\right]\boldsymbol{k},$$

Siempre y cuando $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ sean integrables en [a,b]

Si $\boldsymbol{R}(t)$ es una antiderivada de $\boldsymbol{r}(t)$ [es decir que $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$] en [a, b], entonces:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt \ = \boldsymbol{R}(t)]_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

## *Movimiento de un punto*

Si $\boldsymbol{r}(t)$ es el vector posición de una partícula, entonces se pueden determinar las siguientes magnitudes:

**Velocidad**: $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t)$

El **vector velocidad** $\boldsymbol{r}'(t)$ es siempre tangente a la curva en un punto de ella, y su sentido positivo coincide con el del movimiento del punto en estudio.

**Rapidez**: $v(t) = \parallel \boldsymbol{v}(t) \parallel = \parallel \boldsymbol{r}'(t) \parallel$

La Rapidez es el módulo de la velocidad, por lo tanto es una función escalar. Calculada para un valor determinado del parámetro t, se obtiene un número.

**Aceleración**: $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{r}''(t)$

Conocida el **vector posición** de un punto es posible obtener las funciones **velocidad**, **rapidez** y **aceleración** mediante las derivadas correspondientes.

Por otra parte, cuando se conoce la función **aceleración,** las integrales vectoriales permiten determinar la función **velocidad**, y a partir de ella el vector posición del punto.

$$\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\, dt$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\, dt$$

Cuando se conoce la fuerza que actúa sobre una partícula, entonces se puede determinar la aceleración a partir de la Segunda Ley de Newton del Movimiento.

$$\boldsymbol{F}(t) = m\, \boldsymbol{a}(t).$$

## *Vectores unitarios tangente, normal y binormal*

Dado que $\boldsymbol{r}'(t)$ es tangente a la curva $\mathcal{C}$ en $\boldsymbol{r}(t)$, se define el **vector tangente unitario**:

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\parallel \boldsymbol{r}'(t) \parallel}\boldsymbol{r}'(t)$$

Como $\parallel \boldsymbol{T}(t) \parallel = 1, \forall\, t$ entonces $\boldsymbol{T}'(t) \perp \boldsymbol{T}(t)$. Se define el **vector unitario normal principal**:

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{1}{\parallel \boldsymbol{T}'(t) \parallel}\boldsymbol{T}'(t)$$

El **vector binormal** es perpendicular a los vectores unitarios tangente y normal, y se define mediante el producto vectorial (o cruz), del siguiente modo:

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \wedge \boldsymbol{N}(t)$$

El plano definido por los vectores $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{B}$ en un punto $P$ de la curva $\mathcal{C}$ se llama **plano normal** de $\mathcal{C}$ en $P$. Está constituido por todas las rectas que son ortogonales al vector tangente $\boldsymbol{T}$.
El plano definido por los vectores $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{N}$ en un punto $P$ de la curva $\mathcal{C}$ se llama **plano osculador** de $\mathcal{C}$ en $P$. Es el plano que está más cerca de contener a la parte de la curva próxima de $P$.
El plano definido por los vectores $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{B}$ en un punto $P$ de la curva $\mathcal{C}$ se llama **plano rectificante** de $\mathcal{C}$ en $P$.

## *Curvatura*

La curvatura ($C_f$) de una curva se define como la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario respecto de la longitud de arco:

$$C_f(t) = \left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right|$$

Cuando la curva está expresada en términos del parámetro $t$, se puede demostrar que la curvatura resulta:

$$C_f(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{t})|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

La curvatura también se puede calcular mediante:

$$C_f(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$

Cuando la curva está dada por una función de una variable $y = f(x)$, se puede utilizar la expresión de la curvatura dada por:

$$C_f(x) = \frac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

# 3. *Ejercicios resueltos*

1) Sea $\boldsymbol{r}(t) = t^3\,\boldsymbol{i} + \ln(3-t)\,\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\,\boldsymbol{k}$**.** Identifique las funciones escalares componentes y determine el dominio de $\boldsymbol{r}(t)$

Las funciones escalares componentes son:

$$\boxed{x = f(t) = t^3}$$

$$\boxed{y = g(t) = \ln(3-t)}$$

$$\boxed{z = h(t) = \sqrt{t}}$$

El dominio de $\boldsymbol{r}(t)$ consiste de todos los valores de $t$ para los cuales la expresión de $\boldsymbol{r}(t)$ esté definida.
En este caso:

- $f(t) = t^3$ , está definida para todo número real
- $g(t) = \ln(3-t)$ **,** está definida cuando $3 - t > 0$
- $h(t) = \sqrt{t}$ , está definida cuando $t \geq 0$

Por lo tanto el dominio de $\boldsymbol{r}(t)$ será:

$$\boxed{D_{\boldsymbol{r}} = [0, 3)}$$

2) Determine el $\lim_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t)$, siendo $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t^3)\boldsymbol{i} + te^{-t}\,\boldsymbol{j} + \frac{\sin t}{t}\,\boldsymbol{k}$

Como los limites:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} (1 + t^3) = 1$$
$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} te^{-t} = 0$$
$$\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

existen, entonces se puede aplicar que:

$$\lim_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t) = \left[\lim_{t\to 0} f(t)\right]\boldsymbol{i} + \left[\lim_{t\to 0} g(t)\right]\boldsymbol{j} + \left[\lim_{t\to 0} h(t)\right]\boldsymbol{k}$$

$$\lim_{t\to 0}\boldsymbol{r}(t) = \left[\lim_{t\to 0}(1+t^3)\right]\boldsymbol{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\boldsymbol{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right]\boldsymbol{k}$$
$$\lim_{t\to 0}\boldsymbol{r}(t) = 1\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}$$
$$\boxed{\lim_{t\to 0}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}}$$

3) Sea $\boldsymbol{r}(t) = e^{-3t}\,\boldsymbol{i} + \ln t\,\boldsymbol{j} + t^3\,\boldsymbol{k}$**.** Indique el dominio de $\boldsymbol{r}(t)$y dónde la función es continua.

Las funciones componentes son:

$$x = f(t) = e^{-3t}$$
$$y = g(t) = \ln t$$
$$z = h(t) = t^3$$

$f(t)$ y $h(t)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$. En cambio $g(t)$ está definida siempre que $t > 0$.
En consecuencia $\boxed{D_r = (0,+\infty).}$

Por otra parte, tanto $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones continuas en sus respectivos dominios. Por lo tanto también lo son en $(0,+\infty)$.
En consecuencia $\boxed{\boldsymbol{r}(t) \text{ es continua en } (0,+\infty)}$

4) Para la función vectorial del ejercicio anterior, hallar $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$**.**

Como $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son derivables, entonces:

$$\boldsymbol{r}'(t) = f'(t)\boldsymbol{i} + g'(t)\boldsymbol{j} + h'(t)\,\boldsymbol{k}$$
$$\boxed{\boldsymbol{r}'(t) = -\boldsymbol{3}e^{-3t}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{t}\boldsymbol{j} + 3t^2\,\boldsymbol{k}}$$

Además, por ser derivables las funciones componentes de $\boldsymbol{r}'(t)$, entonces

$$\boxed{\boldsymbol{r}''(t) = 9e^{-3t}\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{t^2}\boldsymbol{j} + 6t\,\boldsymbol{k}}$$

5) Sea $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{t}\,\boldsymbol{i} + (2-t)\boldsymbol{j}$ **.** Determine $\boldsymbol{r}'(t)$ y grafique la curva, el vector posición $\boldsymbol{r}(1)$ y el vector tangente $\boldsymbol{r}'(1)$.

Las funciones componentes son:

$$x = f(t) = \sqrt{t}$$
$$y = g(t) = 2-t$$

Como las funciones componentes de $\boldsymbol{r}(t)$ son derivables, se tiene:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

En $t = 1$, resulta:

$$\boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}'(1) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

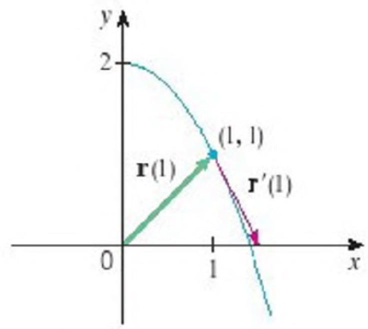
Para graficar la curva, eliminamos el parámetro t entre:

$$x = f(t) = \sqrt{t}$$
$$y = g(t) = 2-t$$

resultando la rama derecha de una parábola descendente con vértice en $(0,2)$ y eje de simetría coincidente con el eje $y$:

$$y = 2 - x^2, \qquad x \geq 0$$

Graficando la parábola, el vector posición $\boldsymbol{r}(1)$ se grafica con su origen en el origen del sistema de coordenadas y su flecha en el punto correspondiente sobre la curva; en tanto que el vector tangente $\boldsymbol{r}'(1)$ se grafica con origen en el extremo del vector posición [el punto (1,1)] y la flecha quedará determinada por la magnitud del vector $\boldsymbol{r}'(1)$, resulta:




6) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice de ecuación vectorial $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} +\ t\,\boldsymbol{k}$ **,** en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$**.**

Por ser las funciones componentes derivables, se tiene:

$$\boldsymbol{r}'(t) = -2\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} +\ 1\,\boldsymbol{k}$$

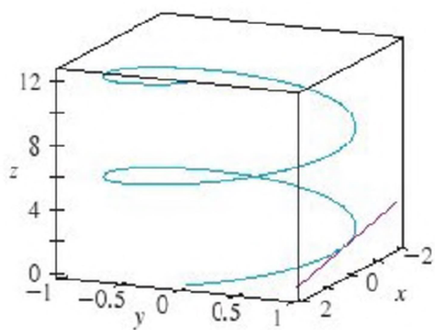
Para $t = \frac{\pi}{2}$, el vector posición será:

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) =\ \boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\ \boldsymbol{k}$$

Y el vector tangente:

$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\,\boldsymbol{i} +\ 1\,\boldsymbol{k}$$

$$\left|\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{5}$$




Resultando el vector tangente unitario:

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\|\ \boldsymbol{r}'(t)\ \|}\boldsymbol{r}'(t) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\ \boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ \boldsymbol{k}$$

Tomamos entonces para las ecuaciones paramétricas de la recta tangente al punto $P_0(0,1,\frac{\pi}{2})$ y como vector director al vector $\boldsymbol{T}(t) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\ \boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ \boldsymbol{k}$, resulta:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}t \\ y = 1 \\ z = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}t \end{cases} \qquad con\ t \in \mathbb{R}$$

7) Demuestre que si $|\boldsymbol{r}(t)| = c$ (constante), entonces $\boldsymbol{r}'(t)$ es ortogonal a $\boldsymbol{r}(t)$ para todo $t$.

Como

$$\boldsymbol{r}(t).\boldsymbol{r}(t) = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = c^2$$

Derivamos, aplicando las reglas de derivación:

$$\boldsymbol{r}'(t).\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}(t).\boldsymbol{r}'(t) = 2.\boldsymbol{r}(t).\boldsymbol{r}'(t) = 0$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{r}(t).\boldsymbol{r}'(t) = 0$$

Y entonces

$$\boldsymbol{r}(t)\ \perp \boldsymbol{r}'(t)$$

8) Para la función vectorial del ejercicio 6, determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{r}(t)dt$

Como $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$, entonces $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son integrables en todo $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{r}(t)dt = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t).\,dt\right]\boldsymbol{i} + \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t).\,dt\right]\boldsymbol{j} + \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t).\,dt\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\, dt\right]\boldsymbol{i} + \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt\right]\boldsymbol{j} + \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt\right]\boldsymbol{k}$$

$$= [2\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{i} + [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{j} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{k}$$

$$= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{\pi^2}{8}\boldsymbol{k}$$

9) Calcule la longitud de arco de la hélice circular recta dada $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$ desde el punto$(1,0,0)$ hasta el punto$(1,0,2\pi)$

Las funciones componentes de $\boldsymbol{r}(t)$son:

$$x = f(t) = \cos t$$
$$y = g(t) = \sin t$$
$$z = h(t) = t$$

y sus derivadas son:

$$f'(t) = -\sin t$$
$$g'(t) = \cos t$$
$$h'(t) = 1$$

Los puntos inicial y final corresponden a $t = 0$ y $t = 2\pi$, respectivamente.

La hélice circular dada es una curva regular pues sus funciones componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ tienen derivadas continuas y no se anulan simultáneamente. Además, no se corta a sí misma, por lo que la longitud de arco **L** está dada por:

$$\boldsymbol{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-\sin t]^2 + [\cos t]^2 + [1]^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}\, t\Big]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L} = 2\sqrt{2}\pi}$$

10) Para la hélice circular del ejercicio anterior, determine los vectores tangente, normal y binormal.

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}'(t) = -\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$
$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

**Vector tangente unitario**:

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|}\boldsymbol{r}'(t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})}$$

**Vector normal principal**:

$$\boldsymbol{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\ \boldsymbol{i} - \sin t\ \boldsymbol{j})$$

$$|\boldsymbol{T}'(t) = | = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{1}{\| \boldsymbol{T}'(t) \|}\boldsymbol{T}'(t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{N}(t) = -\cos t\ \boldsymbol{i} - \sin t\ \boldsymbol{j}}$$

Por lo tanto, en este caso, el vector normal unitario principal es siempre horizontal y pasa por el eje vertical.

**Vector binormal**: es perpendicular al tangente y al normal, y se define por

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \wedge \boldsymbol{N}(t)$$

$$\boldsymbol{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \wedge (-\cos t\ \boldsymbol{i} - \sin t\ \boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t\ \boldsymbol{i} - \cos t\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})}$$

11) Para la hélice circular del ejercicio anterior, determine los planos normal y osculador en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

El punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ corresponde a $t = \frac{\pi}{2}$. Para ese valor del parámetro los vectores unitarios tangente y binormal serán:

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) \ \ ; \ \ \boldsymbol{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})$$

El **plano normal** pasa por el punto $P_0(0, 1, \frac{\pi}{2})$ y tiene por vector normal al vector tangente a la curva $\mathcal{C}$ en dicho punto.

Tomando la ecuación del plano $\overline{P_0P} \,.\, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ (donde $\boldsymbol{n}$ es un vector normal al plano) resulta:

$$\langle x - 0, y - 1, z - \frac{\pi}{2}\rangle \,.\, \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}(z - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\boxed{-x + z - \frac{\pi}{2} = 0}$$

Para el **plano osculador**, el vector normal al plano será el vector binormal, resultando:

$$\langle x-0, y-1, z-\frac{\pi}{2}\rangle \cdot \langle\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$\boxed{x + z - \frac{\pi}{2} = 0}$$

12) Demuestre que la curvatura de una circunferencia de radio $a$ es $1/a$

La curvatura ($C_f$) de una curva se define como la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario respecto de la longitud de arco:

$$C_f(t) = \left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right|$$

Cuando la curva está expresada en términos del parámetro $t$, se puede demostrar que la curvatura resulta:

$$C_f(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{t})|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

La circunferencia con centro en el origen y radio a puede ser representada mediante la función vectorial:

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\ \boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{r}'(t) = -a\sin t\ \boldsymbol{i} + a\cos t\,\boldsymbol{j}$$
$$|\boldsymbol{r}'(t)| = a$$

De modo que:

$$\boldsymbol{T}'(t) = -\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j}$$
$$|\boldsymbol{T}'(t)| = 1$$

Por lo que:

$$C_f(t)\boxed{= \frac{|\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{t})|}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{1}{a}}$$

13) Calcule la curvatura de la curva cúbica torcida dada por $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ , en un punto genérico y en $P(0,0,0)$.

La curvatura también se puede calcular mediante:

$$C_f(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$

Entonces, calculamos las funciones requeridas:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{i} + 2t\,\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$
$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$
$$\boldsymbol{r}''(t) = 2\,\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}'(t)\wedge \boldsymbol{r}''(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\boldsymbol{i} - 6t\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{r}'(t)\wedge \boldsymbol{r}''(t)| = 2\sqrt{9t^4 1 + 9t^2 + 1}$$

Entonces:

$$C_f(t)\boxed{= \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 1 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}}}$$

En el origen, será $t = 0$

$$\boxed{C_f(0) = 2}$$

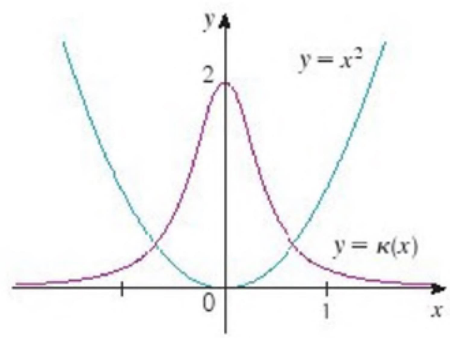
14) Determine la curvatura de la parábola $y = x^2$, en los puntos $(0,0), (1,1)$ y $(2,4)$ .

Como la curva está dada por una función de una variable de la forma: $y = f(x)$, se utilizará la expresión de la curvatura dada por:

$$C_f(x) = \frac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

En nuestro caso: $y'(x) = 2x; y''(x) = 2$

En consecuencia: $C_f(x) = \boxed{\frac{2}{[1+(2x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}}$




En $(0,0)$ la curvatura es $C_f(0) = 2$

En $(1,1)$ la curvatura es $C_f(1) = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} \sim 0.18$

En $(2,4)$ la curvatura es $C_f(2) = \frac{2}{17^{\frac{3}{2}}} \sim 0.03$

Se observa que la curvatura decrece conforme x se hace más grande en valor absoluto. Se corresponde con el hecho que la parábola se hace más plana en ese caso.

# 4. *Ejercicios de aplicación*

1. **Intersección de trayectorias y choque. Ángulo de choque**

A) Determine si chocarán dos objetos que se desplazan por el espacio siguiendo respectivamente las siguientes trayectorias:

$$\boldsymbol{r}_1(t) = t^2\boldsymbol{i} + (7t - 12)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (4t - 3)\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + (5t - 6)\boldsymbol{k}$$

para $t \geq 0$.

Para que los objetos choquen no alcanza con que las curvas se corten. Es necesario que los objetos estén en la misma posición en el mismo tiempo.
Por eso planteamos que, para el mismo valor de $t$, se cumpla $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_2(t)$ y buscaremos si existe tal valor de $t$.
La igualdad vectorial será:

$$t^2\boldsymbol{i} + (7t - 12)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k} = (4t - 3)\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + (5t - 6)\boldsymbol{k}$$

que expresada en componentes resulta:

$$\begin{cases} t^2 = (4t - 3) \\ (7t - 12) = t^2 \\ t^2 = (5t - 6) \end{cases}$$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con una única incógnita. Como son tres ecuaciones cuadráticas, resolvemos cada una y verificamos si hay alguna solución común a las tres, encontrando que el sistema resulta compatible determinado con una única solución: $t = 3$

Es decir que los objetos efectivamente **chocarán** para el tiempo $\boxed{t = 3}$ y el punto en que se produce el choque será:

$$\boxed{\boldsymbol{r}_1(3) = \boldsymbol{r}_2(3) = 9\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}}$$

B) Determine el **ángulo de choque** del ejemplo anterior.

El ángulo de choque estará dado por el ángulo que formen entre sí los vectores tangentes a cada trayectoria en el momento y el punto del choque.

$$\boldsymbol{r}_1{}'(t) = 2t\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2{}'(t) = 4\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

En el momento del choque $t = 3$

$$\boldsymbol{r}_1{}'(3) = 6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2{}'(3) = 4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

Para determinar el ángulo que forman dos vectores, recurrimos a la definición del producto vectorial:

$$|\ \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\ | = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}| \cos\alpha$$

de donde:

$$\cos\alpha = \frac{|\ \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\ |}{|\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|}$$

En este caso

$$|\boldsymbol{r}_1{}'(3)| = |6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}| = 11$$

$$|\boldsymbol{r}_2{}'(3)| = |4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}| = \sqrt{77}$$

$$|\boldsymbol{r}_1{}'(3) \wedge \boldsymbol{r}_2{}'(3)| = |\ (6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) X\ (4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})| = |-1\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}| = \sqrt{101}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{r}_1{}'(3) \wedge \boldsymbol{r}_2{}'(3)|}{|\boldsymbol{r}_1{}'(3)|.|\boldsymbol{r}_2{}'(3)|} = \frac{\sqrt{101}}{11\sqrt{77}}$$

que se corresponde con un ángulo $\boxed{\alpha = 84{,}0236°}$ expresado en grados sexagesimales.

C) Dadas dos partículas que se desplazan por el espacio siguiendo respectivamente las siguientes trayectorias:

$$\boldsymbol{r}_1(t) = t\ \boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (1 + 2t)\boldsymbol{i} + (1 + 6t)\boldsymbol{j} + (1 + 14t)\boldsymbol{k}$$

para $t \geq 0$.

Determine si las trayectorias se cortan, y en caso afirmativo si las partículas chocarán.

Para que las trayectorias se corten, basta con que existan respectivos valores de $t$ en sus dominios (no necesariamente iguales) para los cuales la funciones vectoriales proporciones el mismo punto en el espacio.

Llamando a esos valores $t_1$ y $t_2$, deberá cumplirse que $\boldsymbol{r}_1(t_1) = \boldsymbol{r}_2(t_2)$

$$t_1\boldsymbol{i} + t_1{}^2\boldsymbol{j} + t_1{}^3\boldsymbol{k} = (1 + 2t_2)\boldsymbol{i} + (1 + 6t_2)\boldsymbol{j} + (1 + 14t_2)\boldsymbol{k}$$

Igualdad que en componentes nos lleva a:

$$\begin{cases} t_1 = 1 + 2t_2 \\ t_1{}^2 = 1 + 6t_2 \\ t_1{}^3 = 1 + 14t_2 \end{cases}$$

Resulta un sistema de 3 ecuaciones no lineales con dos incógnitas. Reemplazando el valor de $t_1$ que surge de la primera ecuación en la segunda y reordenando términos obtenemos.

$$36t_2{}^2 + 10\ t_2 = 0$$

Cuyas soluciones son $t_2 = 0 \ y \ t_2 = -\frac{10}{36}$. Descartamos la solución negativa por no pertenecer al dominio de $\boldsymbol{r}_2$ y resulta: $t_2 = 0$. Por lo tanto de la primera igualdad en componentes resulta $t_1 = 1$.

Como ese par de valores satisface también la tercera igualdad, resulta que el sistema resulta compatible determinado con solución $t_2 = 0 \ y \ t_1 = 1$.

Para esos valores respectivos de $t$, las funciones vectoriales brindan el mismo punto imagen.

$$\boldsymbol{r}_1(1) = \boldsymbol{r}_2(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Es decir que **ambas trayectorias se cortan** en el punto $\boxed{P(1,1,1)}$, pero **las partículas no chocan** pues alcanzan dicha posición en tiempos distintos.

**2. Cinemática del punto. Posición, velocidad y aceleración de una partícula**

A. El vector posición de un objeto que se mueve en el plano está dado por:

$$\boldsymbol{r}(t) = t^3\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}$$

Calcular la velocidad, la rapidez y la aceleración cuando $t = 1$.

Determinamos velocidad, aceleración y rapidez:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = 3t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{r}''(t) = 6t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

y las evaluamos para $t = 1$:

$$\boxed{\boldsymbol{v}(1) = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \ ; \ \boldsymbol{a}(1) = 6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \ ; \ |\boldsymbol{v}(1)| = \sqrt{13}}$$

B. Una partícula parte de su posición inicial $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i}$ con una velocidad inicial $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Su aceleración es $\boldsymbol{a}(t) = 4t\,\boldsymbol{i} + 6t\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Calcule su velocidad y posición en el tiempo $t$.

Puesto que $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t)$, tendremos:

$$\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\,dt = \int (4t\,\boldsymbol{i} + 6t\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,dt = 2t^2\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$$

Para determinar el valor de la constante $\boldsymbol{C}$ utilizamos la condición inicial para $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Como $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{C}$ resulta $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t) = 2t^2\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (2t^2 + 1)\boldsymbol{i} + (3t^2 - 1)\boldsymbol{j} + (t + 1)\boldsymbol{k}}$$

Como que $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t)$, tendremos:

$$\boldsymbol{r}(t) = \int v(t)dt = \int [(2t^2 + 2)\boldsymbol{i} + (3t^2 - 1)\boldsymbol{j} + (t + 1)\boldsymbol{k}]\,dt$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\boldsymbol{i} + (t^3 - t)\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{D}$$

Para determinar el valor de la constate $\boldsymbol{D}$ utilizamos la condición inicial $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i}$

Como $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{D}$, resulta $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{i}$, y entonces:

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\boldsymbol{i} + (t^3 - t)\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\boldsymbol{k}$$

3. **Tiro oblicuo de un proyectil**

Un proyectil se dispara desde el nivel del piso con una velocidad inicial $v_0$ que forma un ángulo de elevación $\alpha$ respecto de la horizontal. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable y que la única fuerza externa se debe a la gravedad, determine la función posición $\boldsymbol{r}(t)$ del proyectil. Qué valor de $\alpha$ maximiza el alcance, es decir la distancia horizontal recorrida.

Adoptamos un sistema de coordenadas como el indicado en el esquema. En consecuencia la fuerza actuante es:

$$\boldsymbol{F}(t) = m\,\boldsymbol{a}(t) = -mg\boldsymbol{j} \quad con\ g \approx 9{,}81\,{}^{m}/_{s^2}$$

y la aceleración será: $\boldsymbol{a}(t) = -g\,\boldsymbol{j}$

De donde: $\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)dt = \int -g\boldsymbol{j}\,dt = -gt\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{C}$

Como $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v_o}$ resulta $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{v_o}$ entonces queda: $\boldsymbol{v}(t) = -gt\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v_o}$

Integrando la función velocidad:

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)dt = \int (-gt\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v_o})\,dt = -\frac{1}{2}gt^2\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v_o}\,t$$

Si llamamos $|\boldsymbol{v_o}| = v_o$ a la rapidez inicial del proyectil, entonces la velocidad inicial resulta:

$$\boldsymbol{v_o} = v_o\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v_o\sin\alpha\,\boldsymbol{j}$$

y la función posición puede escribirse de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{r}(t) = (v_o\cos\alpha)t\,\boldsymbol{i} + \left[(v_o\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\boldsymbol{j}$$

Las ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x(t) = (v_o\cos\alpha)t \\ y(t) = (v_o\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La distancia horizontal *d* recorrida –llamada alcance del proyectil – es el valor de *x* cuando *y* = 0, es decir cuando la partícula regresa al nivel del piso.

Haciendo $y(t) = (v_o\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ se obtienen dos soluciones; una es para $t = 0$, que es el instante inicial del movimiento, y la otra para $t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

Para este valor de $t$, la componente $x$ de la posición será:

$$x = (v_0\cos\alpha).\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}$$

Entonces el alcance será: $\boxed{d = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}}$

De la expresión se deduce que el alcance obtiene su valor máximo cuando $\sin 2\alpha = 1$, es decir cuando $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; en decir cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

# 5. *Ejercicios propuestos*

**1) Determine el dominio de las siguientes funciones vectoriales, e indique en qué parte de su dominio son continuas**

a. $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\boldsymbol{i} + e^{-3t}\boldsymbol{j} + ln(t+1)\boldsymbol{k}$

b. $\boldsymbol{r}(t) = \frac{t-2}{t+2}\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + \ln(9 - t^2)\,\boldsymbol{k}$

**2) Calcule los siguientes límites**

a. $\lim_{t\to 0}(e^{-3t}\,\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{\sin(t^2)}\boldsymbol{j} + cos\ 2t\ \boldsymbol{k})$

b. $\lim_{t\to +\infty}(\frac{1+t^2}{1-t^2}\boldsymbol{i} + \ arctg\ t\ \boldsymbol{j} + \frac{1-e^{-2t}}{t}\boldsymbol{k})$

c. ¿La función vectorial del inciso (a) es continua en $t = 0$? Si no lo es, ¿qué tipo de discontinuidad tiene?

**3) Estudio de curvas planas y en el espacio**

a) Escribir la ecuación cartesiana de la curva representada por: $x = 4\,cos\,\theta\ ; y = 3\,sin\,\theta$

b) Escribir la ecuación cartesiana de la curva representada por: $x = 4\,cos\,\theta + 3\ ; y = 3\,sin\,\theta - 2$

c) Escribir la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$y hallar la ecuación cartesiana de la curva representada por: $x = t - 1$ ; $y = \frac{t}{t-1}$. Construya la representación gráfica.

d) Hallar la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$y la ecuación cartesiana de la curva representada por: $x = 5\cos t$ ; $y = 5\,sen\,t\ ; z = 2$

**4) Parametrización de curvas planas y en el espacio**

Escribir las ecuaciones paramétricas y la función vectorial de las siguientes curvas:

a) $x^2 + y^2 = 16$
b) $2x + 3y = 6$
c) $y^2 - x = 0$
d) $4x^2 - 9\,y^2 = 36$
e) $9(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$
f) $x^2 + y^2 - 8\,x + 6\,y = 0$
g) El segmento rectilíneo que une $P(-1, 2, -2)$ y $Q(-3, 5, 1)$
h) El segmento rectilíneo que une $P(a, b, c)$ y $Q(u, v, w)$
i) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

**5) Estudio de funciones vectoriales** (en todos los casos indicar dominio y conjunto de continuidad)

a) Sea $\boldsymbol{r}(t) = t\,cost\ \boldsymbol{i} + t\,sent\ \boldsymbol{j} + t\ \boldsymbol{k}$;para$0 \leq t \leq 3\,\pi$
Demuestre que la curva se encuentra contenida en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y trace la gráfica de la curva determinada por $\boldsymbol{r}\ (t)$. Además calcule $\boldsymbol{r}(\frac{4}{5}\pi)$y grafique su vector de posición

b) Sea $\boldsymbol{r}(t) = a\,cost\ \boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\ \boldsymbol{k}$ para $t \geq 0$. Esquematizar la gráfica de la curva $\mathcal{C}$ determinada por $\boldsymbol{r}\ (t)$

**6) Funciones de posición, velocidad y aceleración**

a) Dada $\boldsymbol{r}(t) = (t + 2)\ \boldsymbol{i} + (2t^2 - 3)\ \boldsymbol{j} + t^3\ \boldsymbol{k}$, determine $\boldsymbol{r}(1)$ y $\boldsymbol{r}(2)$ y trace sus vectores de posición. ¿Para qué valores de $t$ el vector de posición de $\boldsymbol{r}(t)$ está en uno de los planos coordenados?
b) Si $\boldsymbol{r}(t) = 3\,cos\,t\ \boldsymbol{i} + 3\,sen\,t\ \boldsymbol{j} + 4\,t\ \boldsymbol{k}$, representa la posición de una partícula en el instante $t$ ¿cuál es su velocidad, cuál su rapidez y cuál su aceleración?
c) Dada $\boldsymbol{r}(t) = (t^2)\ \boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\ \boldsymbol{j} + (\cos t + t\ sent)\boldsymbol{k}$ con t ≥ 0. ¿cuál es su velocidad, cuál su rapidez y cuál su aceleración?
d) Determinar los vectores velocidad y posición de una partícula que tiene una aceleración dada por $a(t) = 2\boldsymbol{i} + 4t\ \boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$ siendo las condiciones iniciales de velocidad y posición las siguientes:$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{i}$ y $r(0) = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

**7)** Dadas dos partículas que se desplazan por el espacio siguiendo respectivamente las siguientes trayectorias:

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (t - 1)\ \boldsymbol{i} + (1 - 2t)\boldsymbol{j} + (3 + t^2)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2(t) = (3 - t)\boldsymbol{i} + (3t - 9)\boldsymbol{j} + (2t^2 - 1)\boldsymbol{k}$$

para $t \geq 0$. Determine si las trayectorias se cortan y el ángulo de intersección. En caso afirmativo determine si las partículas chocarán.

**8) Longitud de arco**

Calcular la longitud de arco de las siguientes curvas, dadas en forma paramétrica:

a) $x = 5t, y = 4t^2, z = 3t^2;\ 0 \leq t \leq 2$

b) $x = e^t \cos t, y = e^t, z = e^t sin\, t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $x = 2t, y = 4\, sin\, 3t, z = 4\, cos\, 3t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x = 3\sqrt{2}\, t; y = 2\, t^3; z = 6t; 0 \leq t \leq 1$

**9) Terna intrínseca $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$**

a) Sea la curva determinada por $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\, \boldsymbol{i} + 4\sin t\, \boldsymbol{j} + 3t\, \boldsymbol{k},$ para $t \geq 0$. Trazar la curva $\mathcal{C}$ y determinar el vector tangente unitario y el vector normal unitario.

b) Sea $\mathcal{C}$ la curva plana determinada por$\boldsymbol{r}(t) = t^2\, \boldsymbol{i} + t\, \boldsymbol{j}.$ Encontrar los vectores unitarios tangente y normal $\boldsymbol{T}(t)$ y $\boldsymbol{N}(t)$. Además trazar $\mathcal{C}$, $\boldsymbol{T}(1)$ y $\boldsymbol{N}(1)$.

c) Hallar la terna intrínseca y la longitud de arco de la hélice cilíndrica circular recta de paso constante $2\pi$ con función vectorial $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\, \boldsymbol{i} + 4\, sen\, t\, \boldsymbol{j} + t\, \boldsymbol{k}$. Calcular la terna en el punto $\frac{\pi}{2}$.

d) Encontrar el vector tangente unitario a la curva: $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ en $t = 1$

**10) Curvatura $\boldsymbol{C_f(t)}$**

Utilice la fórmula $C_f(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$ para calcular la curvatura en los siguientes casos:

a) $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\, \boldsymbol{j} + (\cos t + t\sin t)\, \boldsymbol{k}\ ,\ t > 0$

b) $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$

Utilice la fórmula $C_f(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$ para calcular la curvatura en los siguientes casos:

c) $\boldsymbol{r}(t) = t\, \boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$

d) $\boldsymbol{r}(t) = 3\, t\, \boldsymbol{i} + \sin t\, \boldsymbol{j} + 4\cos t\, \boldsymbol{k}$

Utilice la fórmula $C_f(x) = \frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$ para calcular la curvatura en los siguientes casos:

e) $y(x) = tg\, x$

f) $y(x) = x\, e^x$

**11)** La función de posición de una partícula está definida mediante la función vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = t^2\, \boldsymbol{i} + 5t\boldsymbol{j} + (t^2 - 16t)\boldsymbol{k}\, .$$

Determine el valor de t para el cual la rapidez adopta un valor mínimo.

**12)** ¿Cuánta fuerza se requiere para que una partícula de masa m tenga una función de posición dada por: $r(t) = t^3\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$?

# 6. *Bibliografía*


- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwards.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Matemática Superior para Ingenieros y Físicos, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff