TP N°6 – Regla de la Cadena. Derivación implícita

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017).

Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018).

1. *Temario*

- Regla de la Cadena
- Derivación implícita
- Sistemas de ecuaciones de funciones implícitas

2. *Resumen teórico*

Regla de la Cadena

<u>Primer caso</u>:

Sea $z = f(u, v)$, con $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$, donde f, g y h son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

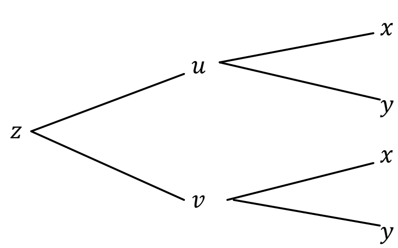
donde:

x, y: son las variables independientes

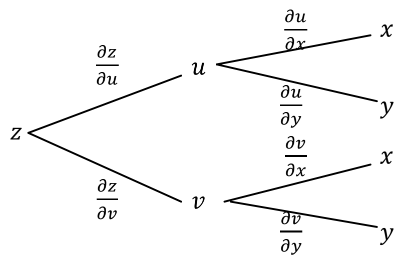
u, v: son las variables intermedias

z: es la variable dependiente

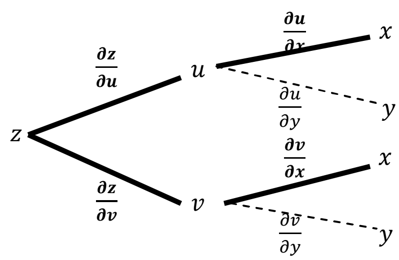
Para recordar la Regla de la Cadena es útil el **diagrama en ramas (o diagrama de árbol)**. Se dibuja la variable dependiente. Luego a partir de ella se dibujan **ramas** hacia las variables intermedias, y desde cada una de las variables intermedias se dibujan **ramas** hacia las variables independientes:



En cada rama se escribe luego la derivada parcial correspondiente, que es la derivada parcial de la variable que está antes de la rama respecto de la variable que está después de la rama. Por lo tanto queda:



Para calcular la derivada parcial de z respecto de x (por ejemplo) se calcula el producto de las derivadas parciales de cada **rama** desde z hasta x , y luego se suman los productos:



resultando: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x}$

Se puede construir un diagrama en ramas para cada uno de los casos que se exponen a continuación.

Segundo caso

Sea $w = f(u, v, r)$, con $u = g(x, y, z)$, $v = h(x, y, z)$ y$r = k(x, y, z)$ donde f, g, h y k funciones son diferenciables; entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial y}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial z}$$

Tercer caso

Sea $w = f(x, y, z)$, con $x = g(t)$,$y = h(t)$ y $z = k(t)$ donde *f, g, h* y *k* son funciones diferenciables; entonces:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} . \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} . \frac{dz}{dt}$$

Observación: esta derivada se puede interpretar como la razón de cambio de w con respecto a t cuando el punto (x, y, z) se desplaza por la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = g(t)$, $y = h(t)$ y $z = k(t)$. Si, por ejemplo, w representa la temperatura en el punto (x, y, z) la función compuesta $f[g(t), h(t), k(t)]$ representa la temperatura sobre la curva C y la derivada $\frac{dw}{dt}$ representa la razón a la cual la temperatura cambia a lo largo de C respecto de t.

Derivación implícita

Primer caso

Si una ecuación $F(x, y) = 0$ determina implícitamente una función derivable *f* de una variable independiente x tal que $y = f(x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Para deducir esta ecuación se supone que $F(x,y) = 0$ define a $\boldsymbol{y}$ implícitamente como una función de $\boldsymbol{x}$. El **teorema de la función implícita** proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si $F(x,y)$ se define sobre un disco que contiene a (a,b), donde:

- $F(a,b) = 0$,
- $F_y(a,b) \neq 0$,
- F_x y F_y son continuas sobre el disco

entonces la ecuación $F(x,y) = 0$ define a $\boldsymbol{y}$ como una función de $\boldsymbol{x}$ cerca del punto (a,b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación antes indicada.

Segundo caso

Sea ahora una ecuación $F(x,y,z) = 0$ que determina implícitamente una función diferenciable f de dos variables independientes **x** e **y** tal que $z = f(x,y)$ para todo (x,y) en el dominio de f, entonces:

$$\frac{\partial z}{dx} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

$$\frac{\partial z}{dy} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

Nuevamente, otra formulación del **teorema de la función implícita**, proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si $F(x,y,z)$ se define sobre una esfera que contiene al punto (a,b,c), donde:

- $F(a,b,c) = 0$,
- $F_z(a,b,c) \neq 0$,
- F_x, F_y y F_z son continuas dentro de la esfera,

entonces la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define a **z** como una función de **x** e **y** cerca del punto (a,b,c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por las expresiones anteriores.

Sistemas de funciones implícitas

Primer caso

Sean las ecuaciones: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

con: $\begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{vmatrix} \neq 0$

que determinan implícitamente a $y = f(x)$ y $z = g(x)$, siendo F, G , f y g funciones diferenciables; entonces:

supongamos a $F(x,y,z)$ y $G(x,y,z)$, como funciones de x, y, z donde

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

La composición de funciones determina a F y G como funciones de una variable x, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} F[x, f(x), g(x)] = 0 \\ G[x, f(x), g(x)] = 0 \end{cases}$$

En consecuencia, podemos determinar sus derivadas totales respecto de $\boldsymbol{x}$ mediante la Regla de la Cadena, dado que F, G, f y g son funciones diferenciables. Se tendrá:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ \dfrac{dG}{dx} = \dfrac{\partial G}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial G}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

Como $\frac{dx}{dx} = 1$, podemos escribir las ecuaciones anteriores de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \boldsymbol{\dfrac{dz}{dx}} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}} + \dfrac{\partial G}{\partial z} \cdot \boldsymbol{\dfrac{dz}{dx}} = -\dfrac{\partial G}{\partial x} \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$, $\boldsymbol{\frac{dz}{dx}}$

que se puede resolver mediante la **Regla de Cramer**[1]:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ -G_x(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dx}} = \frac{\begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & -F_x(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & -G_x(x,y,z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{vmatrix}}$$

Definiendo al Jacobiano de F y G respecto a las variables $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$, como el determinante:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{vmatrix}$$

y reemplazando los restantes determinantes por sus respectivos Jacobianos, resulta:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}}$$

Segundo caso

Sean las ecuaciones: $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$

[1] Se recomienda a los alumnos repasar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en particular la **Regla de Cramer**.

con: $\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix} \neq 0$

que determinan implícitamente a $u = h(x,y)$ y $v = k(x,y)$, dos funciones diferenciables de las variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, y sean $F(x,y,u,v)$ y $G(x,y,u,v)$ funciones diferenciables.

Supongamos a $F(x,y,u,v)$ y $G(x,y,u,v)$ funciones de x, y, u, v donde:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ u = h(x,y) \\ v = k(x,y) \end{cases}$$

La composición determina a F y G como funciones de x e y de la siguiente manera:

$$\begin{cases} F[x,y,h(x,y),k(x,y)] = 0 \\ G[x,y,h(x,y),k(x,y)] = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto se puede aplicar la Regla de la Cadena, derivando ambas respecto de x.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}.\dfrac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial x}} + \dfrac{\partial F}{\partial v}.\dfrac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial x}} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}.\dfrac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial x}} + \dfrac{\partial G}{\partial v}.\dfrac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial x}} = -\dfrac{\partial G}{\partial x} \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$, $\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$\frac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial x}} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ -G_x(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial x}} = \frac{\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & -F_x(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & -G_x(x,y,u,v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Si ahora derivamos F y G respecto de $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial y}} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial y}} = -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial y}} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial y}} = -\frac{\partial G}{\partial y} \end{cases}$$

Se trata de otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dy}}$, $\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dy}}$

Nuevamente, aplicando la Regla de Cramer

$$\frac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\begin{vmatrix} -F_y(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ -G_y(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & -F_y(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & -G_y(x,y,u,v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Resultando finalmente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

3. *Ejercicios resueltos*

1) Sea $\boldsymbol{z = f(x,y) = x^2\mathrm{y} + 3\mathrm{x}y^4}$**, donde** $\boldsymbol{x = g(t) = sin(2t)}$; $\boldsymbol{y = k(t) = cos\ t}$ **, determine** $\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}$ **cuando** $\boldsymbol{t = 0}$.

Como f, g y k son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial x}} \cdot \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial y}} \cdot \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$$

Es decir:

$$\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}} = (\mathbf{2xy + 3\ y^4})\ [\mathbf{2}\ \boldsymbol{cos(2t)}] + (\boldsymbol{x^2} + \mathbf{12xy^3})(-\ \mathbf{sin\ t})$$

Esta expresión contiene tres tipos de variables:

- t: es la variable independiente
- x, y: son las variables intermedias
- z: es la variable dependiente

<u>**Observación**</u>: el alumno construirá el respectivo diagrama en ramas.

Si quisiéramos obtener la expresión de la derivada para cualquier valor de t, procedemos a reemplazar las variables intermedias, en función de las variables independientes:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = [2sin(2t)\cos t + 3\cos^4 t]\,[2\,cos(2t)] + \,[sin^2(2t) + 12sin(2t)cos^3\mathrm{t}](-\sin \mathrm{t})}$$

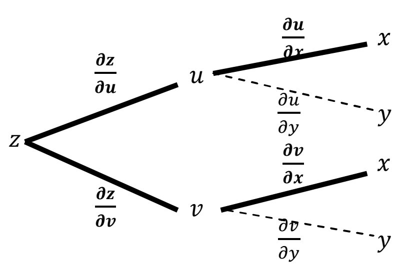
En cambio para resolver el caso numérico propuesto, no es necesario escribir las expresiones de x e y en términos de t. Simplemente como cuando $t = 0$, se tiene $x = \sin 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$, resulta:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\mathrm{t}=0} = (0+3)\,(2\cos 0) + \,(0+0)(-\sin 0) = 6$$

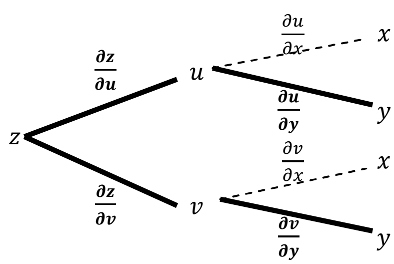
$$\boxed{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\mathrm{t}=0} = 6}$$

2) Sea $\boldsymbol{z = f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{e}^{\mathbf{u}} sin\, v}$ donde **u**= $\boldsymbol{g(x,y) = xy^2}$; **v** = $\boldsymbol{h(x,y) = x^2y}$**.** Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

Como f, g y k son funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$, aplicamos la Regla de la Cadena. Ayudándonos con el diagrama en ramas obtenemos:



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$



$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{u}} sin\, v)\,(y^{\,2}) + \,(\mathrm{e}^{\mathrm{u}} cos\, v)(2xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\mathrm{e}^{\mathrm{u}} sin\, v)\,(2xy) + \,(\mathrm{e}^{\mathrm{u}} cos\, v)(x^2)$$

Estas expresiones contienen tres tipos de variables:

- x, y: son las variables independientes
- u, v: son las variables intermedias
- z: es la variable dependiente

Reemplazamos las variables intermedias en términos de las variables independientes:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} \sin(x^2 y) + 2xye^{xy^2} \cos(x^2 y)}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = 2xye^{xy^2} \sin(x^2 y) + x^2 e^{xy^2} \cos(x^2 y)}$$

3) Sea $\boldsymbol{w = f(u, v, r) = u^4 \mathrm{v} + v^2 r^3}$, donde:

$$\boldsymbol{u = g(x, y, z) = xye^{z}}$$
$$\boldsymbol{v = h(x, y, z) = xy^2 e^{-z}}$$
$$\boldsymbol{r = k(x, y, z) = x^2 y \sin z}$$

Determine $\boldsymbol{\frac{dw}{dy}}$ cuando $\mathbf{x} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{y = 1}$, $\boldsymbol{z = 0}$.

Como f, g , h y k son diferenciables en todo $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} =$$
$$= (4u^3 \mathrm{v})(xe^z) + (u^4 + 2\mathrm{vr}^3)(2xye^{-z}) + (3v^2 \mathrm{r}^2)(x^2 \sin z)$$

Si deseamos obtener la expresión de $\boldsymbol{\frac{dw}{dy}}$ para cualquier valor de x, y, z procedemos a reemplazar las variables intermedias por sus expresiones en función de las variables independientes:

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial y} = [4(xye^z)^3 (xy^2 e^{-z})](xe^z) + [(xye^z)^4 + 2(xy^2 e^{-z})(x^2 y \sin z)^3](2xye^{-z})}$$
$$\boldsymbol{+ [3(xy^2 e^{-z})^2 (x^2 y \sin z)^2](x^2 \sin z)}$$

Pero para calcular la derivada parcial con valores numéricos indicados en el enunciado, no es necesario expresar las variables intermedias en función de las variables independientes:

Cuando $\mathrm{x} = 2$, $y = 1$, $z = 0$, tendremos $u = 2$, $v = 2$ y $r = 0$, de modo que:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0)$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = 192}$$

4) Sea $\boldsymbol{g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)}$, en la que f es una función derivable; demuestre que $\boldsymbol{g(s, t)}$ satisface la ecuación:

$$\boldsymbol{t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0}$$

Sean:

$$\begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = t^2 - s^2 \end{cases}$$

Entonces: $g(s, t) = f(x, y)$ y por la **Regla de la Cadena**:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(2t)$$

Por lo tanto:

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0}$$

5) Si $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas con $\boldsymbol{x = r^2 + s^2}$ e $\boldsymbol{y = 2rs}$, calcule $\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial r}}$ y $\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}}$.

La Regla de la Cadena da:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(2s)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial r} = 2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}}$$

Ahora derivamos nuevamente, aplicando regla de la derivación para el producto de funciones:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} + 2s\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}$$

Pero aplicando la Regla de la Cadena:

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(2s)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Sustituyendo en la anterior:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(2s)\right] + 2s\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$$

6) Determine la derivada de $\boldsymbol{y}$ respecto de $\boldsymbol{x}$, si $\boldsymbol{x^3 + y^3 = 6xy}$.

La ecuación dada puede escribirse como:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

que define implícitamente a $y = f(x)$. Por consiguiente, aplicando la regla de derivación implícita obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^y - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}}$$

7) Determine $\frac{\partial z}{dx}$ y $\frac{\partial z}{dy}$, si $\boldsymbol{x^3 + y^3 + z^3 + 6xy = 1}$

Sea $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$. Esta ecuación determina implícitamente la función $z = f(x,y)$ de dos variables independientes. En consecuencia:

$$\frac{\partial z}{dx} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{dy} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

8) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 - 5z + 1 = 0} \\ \boldsymbol{G(x,y,z) = x - y + z^3 - 4 = 0} \end{cases}$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$.

Aplicaremos las expresiones para derivación implícita de sistemas de ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

Calculamos los Jacobianos:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\mathrm{y}^2 & -5 \\ -1 & 3\mathrm{z}^2 \end{vmatrix} = 18y^2\mathrm{z}^2 - 5$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} F_x(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_x(x,y,z) & F_z(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\mathrm{x}^2 & -5 \\ 1 & 3\mathrm{z}^2 \end{vmatrix} = 9\mathrm{x}^2\mathrm{z}^2 + 5$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} F_y(x,y,z) & F_x(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) & G_x(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\mathrm{y}^2 & 3\mathrm{x}^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6\mathrm{y}^2 + 3\mathrm{x}^2$$

Reemplazando:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{9\mathrm{x}^2\mathrm{z}^2 + 5}{18y^2\mathrm{z}^2 - 5}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = -\frac{6\mathrm{y}^2 + 3\mathrm{x}^2}{18\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 - 5}}$$

9) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - y^2 + u^3 + v^3 = 0 \\ G(x,y,u,v) = x^3 + y - u^4 + v^4 = 0 \end{cases}$$

Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Aplicaremos las expresiones para derivación implícita de sistemas de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Calculamos los Jacobianos respectivos:

$$\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\mathrm{u}^2 & 3\mathrm{v}^2 \\ -4\mathrm{u}^3 & 4v^3 \end{vmatrix} = 12\mathrm{u}^2 v^3 + 12\mathrm{u}^3\mathrm{v}^2$$

$$\begin{vmatrix} F_x(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_x(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3\mathrm{v}^2 \\ 3x^2 & 4v^3 \end{vmatrix} = 4v^3 - 9x^2v^2$$

$$\begin{vmatrix} F_y(x,y,u,v) & F_v(x,y,u,v) \\ G_y(x,y,u,v) & G_v(x,y,u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\mathrm{y} & 3\mathrm{v}^2 \\ 1 & 4v^3 \end{vmatrix} = -8yv^3 - 3\mathrm{v}^2$$

$$\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_x(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_x(x,y,u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\mathrm{u}^2 & 1 \\ -4\mathrm{u}^3 & 3x^2 \end{vmatrix} = 9\mathrm{u}^2x^2 + 4\mathrm{u}^3$$

$$\begin{vmatrix} F_u(x,y,u,v) & F_y(x,y,u,v) \\ G_u(x,y,u,v) & G_y(x,y,u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\mathrm{u}^2 & -2\mathrm{y} \\ -4\mathrm{u}^3 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathrm{u}^2 - 8\mathrm{u}^3y$$

Reemplazando en las expresiones generales, indicadas anteriormente, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{4v^3 - 9x^2v^2}{12\mathrm{u}^2v^3 + 12\mathrm{u}^3\mathrm{v}^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{-8yv^3 - 3\mathrm{v}^2}{12\mathrm{u}^2v^3 + 12\mathrm{u}^3\mathrm{v}^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{9\mathrm{u}^2x^2 + 4\mathrm{u}^3}{12\mathrm{u}^2v^3 + 12\mathrm{u}^3\mathrm{v}^2} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3\mathrm{u}^2 - 8\mathrm{u}^3y}{12\mathrm{u}^2v^3 + 12\mathrm{u}^3\mathrm{v}^2}$$

4. *Ejercicios de aplicación*

1. Razón de cambio de la presión.

La presión P (medida en kilopascales), el volumen V (medido en litros) y la temperatura T (medida en º Kelvin) de un mol de gas ideal están relacionados mediante la ecuación:

$$P.V = 8{,}31\,T$$

Utilizar la Regla de la Cadena para determinar la razón a la cual cambia la presión P, cuando *T* es de 300 ºK y aumenta a razón de 0,1 ºK/seg, y el volumen *V* es de 100 litros y aumenta a razón de 0,2 L/seg.

Si ***t*** representa el tiempo trascurrido, medido en segundos, en el instante indicado se tiene:

T = 300 ºK ; dT/dt = 0,1 ºK/seg ; V = 100 Litros ; dV/dt = 0,2 L/seg.

La función a estudiar es: $P = 8{,}31\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}}$. Entonces aplicando la Regla de la Cadena se tiene:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\cdot\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8{,}31}{V}\cdot\frac{dT}{dt} - \frac{8{,}31\ T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8{,}31}{100}\cdot(0{,}1) - \frac{8{,}31\ (300)}{(100)^2}\ (0{,}2)$$

$$- = \mathbf{-0.04155\ kPa/seg}$$

El alumno repetirá el cálculo si: **dT/dt = – 0,2 ºK/seg** y **dV/dt = – 0,1 L/seg**.

2. **Corriente en un circuito eléctrico**.

El voltaje V en un circuito eléctrico sencillo disminuye lentamente a medida que la batería se descarga. La resistencia R del circuito se incrementa a medida que el resistor se calienta.

Mediante la **Ley de OHM** y la **Regla de la Cadena**, determinar cómo varía la corriente eléctrica ***I*** en el momento en que R = 300 Ω, variando a razón de 0,03 Ω/seg, en tanto que el voltaje V es 32 Volts disminuyendo a razón de –0,01 volt/seg.

De la Ley de OHM se obtiene: $I = \frac{V}{R}$

Para los valores dados: V = 32 volts ; dV/dt = – 0,01 volt/seg ; R = 300 Ω ; dR/dt = + 0,03 Ω/seg.

Por la Regla de la Cadena se tiene:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dV}{dt} - \frac{V}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{300}\cdot(-0{,}01) - \frac{32}{300^2}\ (0{,}03)$$

$$\frac{\mathbf{dI}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-3{,}33\ x\ 10^{-5} - 1{,}066\ x\ 10^{-5} = -4{,}4\ x\ 10^{-5}}\ \textbf{Amperios/seg}$$

3. **Volumen de una caja**.

El volumen V de un paralelepípedo rectangular está dado por la función:

V (x, y, z) = x.y.z

Se desea conocer la razón de cambio del volumen de la caja con el tiempo en el instante en que:

x = 20 cm variando a razón de – 0,1 cm/min ;

y = 14 cm variando a razón de + 0,2 cm/min ;

z = 8 cm variando a razón de – 0,2 cm/min.

Para determinar la razón de cambio del volumen con el tiempo, se aplica la Regla de la Cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = yz.\frac{dx}{dt} + xz.\frac{dy}{dt} + xy.\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = (14\ cm)(8\ cm).(-0{,}1\ min) + (20\ cm)(8\ cm).\left(0{,}2\ {}^{cm}/_{min}\right) + (20\ cm)(14\ cm).\left(-0{,}2\ {}^{cm}/_{min}\right)$$

$$\mathbf{\frac{dV}{dt} = (-11,2 + 32 - 56)\ {}^{cm^3}/_{min} = -35,2\ {}^{cm^3}/_{min}}$$

NOTA: En todos los casos el alumno construirá los respectivos diagramas en ramas.

5. *Ejercicios propuestos*

<u>NOTA</u>: En todos los casos propuestos, los alumnos trazarán los diagramas en ramas.

1) Empleando la Regla de la Cadena hallar $\frac{dw}{dt}$ dependiendo del caso:

a) $w = x^2 + yz, x = t^2 + 1, y = 2t - 4, z = t^3$
b) $w = r^2 - s\,tg\,v,\ r = sen^2\,t, s = cos\,t, v = 4t$
c) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ x = tg\ t,\ y = cos\ t,\ z = sen\ t,\ 0 \leq t < \pi/2$
d) $w = x^2 y^3 z^4, x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = 5t + 4$
e) $w = ln\,(u + v), u = e^{-2t}, v = t^3 - t^2$
f) $w = x^3 - y^3, x = \frac{1}{t+1}, y = \frac{t}{t+1}$

2) Empleando la Regla de la Cadena obtener las derivadas parciales que se indican y realizar el correspondiente diagrama de ramas:

a) $\frac{\partial w}{\partial p}$ y $\frac{\partial w}{\partial q}$ donde $w = r^3 + s^2,\ r = pq^2,\ s = p^2\,sen\,q$
b) $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ donde $w = xe^{-y},\ x = arctg\,(r + st),\ y = ln\,(rs + 3st)$
c) $\frac{\partial w}{\partial z}$ cuando $w = r^2 + sv + t^3$, con: $r = x^2 + y^2 + z^2, s = xyz, v = xe^y, t = yz^2$
d) $\frac{\partial w}{\partial \rho}, \frac{\partial w}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial w}{\partial \emptyset}$, cuando$w = x^2 + y^2 + z^2$, con $x = \rho\,sen\,\emptyset\,cos\,\theta, y = \rho\,sen\,\emptyset\,sen\,\theta, z = \rho\,cos\,\emptyset$
e) $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$, si $w = u\,sen\,v,\ u = x^2 + y^2, v = xy.$

3) Mediante derivación implícita encontrar $\frac{dy}{dx}$, donde $y = f(x)$

a) $4xy^3 - yx^2 + x^3 - 5x + 6 = 0$

b) $y^4 + 3y - 4\,x^3 - 8x - 1 = 0$

c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

4) Mediante derivación implícita encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, donde $z = f(x, y)$

a) $x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$

b) $xe^{y\,z} - 2y\,e^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

c) $yx^2 + z^2 + \cos xyz = 4$

5) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones de funciones implícitas para hallar las derivadas que se indican:

a) Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ si: $\begin{cases} x^3 + 2y^3 - 5z + 1 = 0 \\ x - y + z^3 - 4 = 0 \end{cases}$

b) Hallar $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ si: $\begin{cases} x^5 + y = t \\ x^2 + y^3 = t^2 \end{cases}$

c) Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ si: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 8 \\ x^2 - 3y^2 = z \end{cases}$

d) Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ si: $\begin{cases} 3x^2 - 6y^2 = u + v \\ 4xu + 2yv = 0 \end{cases}$

e) Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ si: $\begin{cases} 2\cos xu - sen\, yv = 0 \\ 4\, e^{3xv} + 5\, e^{2yu} = 0 \end{cases}$

6) La producción de trigo en un año dado, designada con la variable *W*, depende de la temperatura promedio *T* y de la precipitación pluvial anual *R*. Los especialistas estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de 0,15 ºC/año, y que la precipitación anual está disminuyendo a razón de 0,1 cm/año. También estiman que, a niveles de producción actuales, $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ y $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$.

a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
b) Aplicar la Regla de la Cadena para determinar la razón de cambio de la producción anual de trigo con el tiempo dada por $\frac{\partial W}{\partial t}$.

7) La presión de un mol de gas ideal se incrementa a razón de 0,05 kPa/seg y la temperatura aumenta a razón de 0,15 ºK/seg. Utilice la función dada en el primer ejercicio de aplicación resuelto y la Regla de la Cadena para determinar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 20 kPa y la temperatura es de 320 ºK.

8) El radio *R* y la altura *h* de un cilindro circular recto aumentan a razón de 0,01 cm/min y 0,02 cm/min, respectivamente. Utilice la Regla de la Cadena para calcular la razón de cambio del volumen del cilindro con respecto al tiempo, cuando *R* = 8 cm y *h* = 20 cm. Calcule además la razón de cambio del área lateral del cilindro.

9) Los lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos de un triángulo isósceles varían a razón de 0,1 m/hora y de –1 º/hora, respectivamente. Utilice la Regla de la Cadena para determinar la razón de cambio del área del triángulo en el instante en que la longitud de los lados iguales es de 20 m y el ángulo comprendido es de 60º.

6. *Bibliografía*

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Matemática Superior para Ingenieros y Físicos, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff