TP N° 5 – Incrementos y diferenciales

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017).

Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018).

1. *Temario*

- Incremento de funciones de varias variables
- Diferencial total
- Teorema de los incrementos finitos
- Diferenciabilidad implica continuidad

2. *Resumen teórico*

Incremento

Sea $\mathrm{z} = \mathrm{f(x,y)}$ y sean Δx y Δy los incrementos de x e y, respectivamente. El incremento $\Delta \mathrm{z}$ de $\mathrm{z} = \mathrm{f(x,y)}$ es:

$$\mathbf{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

Teorema de los incrementos finitos

Sea $\mathrm{z} = \mathrm{f(x,y)}$, donde $\mathrm{f(x,y)}$ es una función definida en una región rectangular abierta:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a < x < b, c < y < d\}$$

para la cual $\mathrm{f_x(x,y)}$ y $\mathrm{f_y(x,y)}$ existen en toda *R* y son continuas en el punto $(x_0, y_0) \in R$.

Si $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in R$ y

$$\mathbf{\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}$$

entonces:

$$\mathbf{\Delta z = f_x(x_0, y_0). \Delta x + f_y(x_0, y_0). \Delta y + \boldsymbol{\varepsilon}_1(\Delta x, \Delta y). \Delta x + \boldsymbol{\varepsilon}_2(\Delta x, \Delta y). \Delta y}$$

donde $\varepsilon_1(\Delta \mathrm{x}, \Delta \mathrm{y})$ y $\varepsilon_2(\Delta \mathrm{x}, \Delta \mathrm{y})$ son funciones de los incrementos $\Delta \mathrm{x}$ y $\Delta \mathrm{y}$ de las variables independientes, que tienen límite 0 cuando $(\Delta \mathrm{x}, \Delta \mathrm{y}) \to (0,0)$

Diferencial

Sea $\mathrm{z} = \mathrm{f(x,y)}$ y sean $\Delta \mathrm{x}$ y $\Delta \mathrm{y}$ los incrementos de x e y, respectivamente

Los diferenciales $\mathbf{dx}$ y $\mathbf{dy}$ de las variables independientes x e y son:

$$\mathrm{dx} = \Delta \mathrm{x} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{dy} = \Delta \mathrm{y}$$

El diferencial total $\mathbf{dz}$ de la variable dependiente z es:

$$\mathbf{dz = f_x(x, y). dx + f_y(x, y). dy}$$

Función Diferenciable

Sea $z = f(x, y)$. La función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si Δz se puede expresar en la forma:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0).\Delta x + f_y(x_0, y_0).\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y).\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y).\Delta y$$

donde $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ son funciones de los incrementos de las variables independientes, que tienen límite 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Teoremas

1. Si $z = f(x, y)$ y $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas en una región rectangular R, entonces f (x, y) es diferenciable en R.

2. Si una función $z = f(x, y)$ de dos variables es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces $f(x, y)$es continua en (x_0, y_0).

3. Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables independientes y $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas en una región rectangular *R*, entonces $f(x, y)$ es continua en R.

Generalización para funciones de tres variables.

Sea $w = f(x, y, z)$ y sean Δx , Δy y Δz los incrementos de x, y, z, respectivamente.
Los diferenciales $\mathbf{dx}, \mathbf{dy}$ y $\mathbf{dz}$ de las variables independientes x, y, z son:

$$dx = \Delta x \quad , \quad dy = \Delta y \quad , \quad dz = \Delta z$$

El diferencial total dw de la variable dependiente w es:

$$\mathbf{dw = f_x(x, y, z).dx + f_y(x, y, z).dy + f_z(x, y, z).dz}$$

3. *Ejercicios resueltos*

1) **Sea $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Determine el incremento Δz de la función cuando la variable x pasa de 2 a 2.05 y la variable y pasa de 3 a 2.96.**

El incremento de $f(x, y)$ es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

En este caso:

$$(x, y) = (2,3) \ \text{ y } \ (x + \Delta x, y + \Delta y) = (2.05, 2.96)$$

Entonces:

$$\Delta z = f(2{,}05;\ 2{,}96) - f(2, 3) = (2{,}05^2 + 3 \text{ x } 2{,}05 \text{ x } 2{,}96 - 2{,}96^2) - (2^2 + 3 \text{ x } 2 \text{ x } 3 - 3^2)$$

$$\boxed{\Delta z = 0.6449}$$

2) **Sea la función del ejercicio anterior. Determine dónde es diferenciable, aplicando la definición.**

La función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si Δz se puede expresar en la forma:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0).\Delta x + f_y(x_0, y_0).\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y).\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y).\Delta y$$

donde $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ son funciones que tienen límite 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$.
Sea (x, y) un punto genérico del dominio de $f(x, y)$, que en este caso es $\mathbb{R}^2$. El incremento de $f(x, y)$ será:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= [(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2] - (x^2 + 3xy - y^2) =$$
$$= (x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 3xy + 3x\Delta y + 3\,y\,\Delta x + 3\Delta x\Delta y - y^2 - 2y\,\Delta y - \Delta y^2) - (x^2 + 3xy - y^2) =$$
$$= 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 3x\Delta y + 3\,y\,\Delta x + 3\Delta x\Delta y - 2y\,\Delta y - \Delta y^2$$

Teniendo en cuenta que $f_x(x, y) = 2x + 3y$ y $f_y(x, y) = 3x - 2y$, reagrupamos convenientemente los 1º y 4º términos, por un lado; y 3º y 6º por otro lado y sacamos factor común Δx y Δy, respectivamente:

$$\Delta z = (2x + 3y)\,\Delta x + (3x - 2y)\Delta y + \Delta x^2 + 3\Delta x\Delta y - \Delta y^2 =$$
$$= (2x + 3y)\,\Delta x + (3x - 2y)\Delta y + (\Delta x + 3\Delta y)\Delta x - \Delta y^2$$

Llamando: $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \Delta x + 3\Delta y$; $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = -\Delta y$

resulta:

$$\Delta z = (2x + 3y)\,\Delta x + (3x - 2y)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y =$$
$$= f_x(x, y).\Delta x + f_y(x, y).\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y).\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y).\Delta y$$

con:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta x + 3\Delta y = 0$$
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} -\Delta y = 0$$

Como esto ocurre para cualquier (x, y) , entonces $f(x, y)$ $\boxed{\text{es diferenciable } \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2}$

3) **Sea la función del ejercicio 1. Determine dónde la función es diferenciable, mediante el teorema de las derivadas primeras.**

El teorema dice que si $z = f(x, y)$ y $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son funciones continuas en una región rectangular R, entonces $f(x, y)$ es diferenciable en R.
En este caso:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$$

y sus derivadas parciales primeras son:

$$f_x(x, y) = 2x + 3y$$
$$f_y(x, y) = 3x - 2y$$

$f(x, y)$, $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ por ser funciones polinomiales. En consecuencia:

$$\boxed{f(x, y) \text{ es diferenciable } \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2}.$$

Observación: en los ejercicios 2 y 3 se determinó el conjunto donde $f(x, y)$ es diferenciable mediante dos métodos distintos: mediante la definición[1] en el primer caso; y mediante el teorema de continuidad de las derivadas parciales primeras (**condición suficiente pero no necesaria**) en el segundo caso.

4) **Sea la función del ejercicio 1. Estime la variación de la función mediante el diferencial total, para los mismos puntos del ejercicio 1.**

Para calcular la variación de la función tendremos en cuenta que, si Δx y Δy son pequeños, entonces $\Delta z \cong dz$. Entonces, como:

[1] Es decir mediante el Teorema de los Incrementos finitos.

$$dz = f_x(x_0, y_0).dx + f_y(x_0, y_0).dy$$

haciendo:

$$(x_0, y_0) = (2{,}3)$$

$$dx = \Delta x = 2{,}05 - 2 = \ 0{,}05$$

$$dy = \Delta y = 2{,}96 - 3 = -0{,}04$$

y como:

$$f_x(x, y) = 2x + 3y$$

$$f_y(x, y) = 3x - 2y$$

resulta:

$$dz = (2x2 + 3x3)x\ 0{,}05 + (3x2 - 2x3)\ x\ (-0{,}04) = 0{,}65$$

En consecuencia:

$$\boxed{\Delta z \cong \ 0{,}65}$$

5) **Sea la función del ejercicio 1. Estime $\mathbf{f(1,94; 3,04)}$ mediante el diferencial total y compárelo con el valor exacto.**

Sabemos que:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \Delta z$$

Si estimamos el incremento Δz mediante el diferencial dz, haciendo $\Delta z \cong dz$ resulta:

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + dz$$

En este caso:

$$(x_0, y_0) = (2{,}3)$$

$$(x, y) = (1{,}94; 3{,}04)$$

$$dx = 1{,}94 - 2 = -0{,}06\ ;\ dy = 3{,}04 - 3 = \ 0{,}04$$

Entonces:

$$f(1{,}94; 3{,}04) \cong f(2{,}3) + dw$$

$$= \ f(2, 3) + f_x(2, 3).dx + f_y(2, 3).dy$$

$$= (2^2 + \ 3x2x3 \ - 3^2) + \ (2x2 + 3x3)\ x\ (-0{,}06) + (3x2 - 2x3)\ x\ 0{,}04$$

$$= 13 + (-0{,}78)$$

$$\boxed{f(1{,}94;\ 3{,}04) \cong \ 12{,}22}$$

Para calcular el valor exacto evaluamos:

$$f(1{,}94;\ 3{,}04) = \ 1{,}94^{\mathbf{2}} + \ 3x1{,}94x3{,}04 \ - 3{,}04^{\mathbf{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{f(1,94;\ 3,04) = \ 12,2148}}$$

Observamos que el error cometido $12{,}22 - 12{,}2148 = \ 0{,}0052$ es muy pequeño.

6) **Dada $\mathbf{z = f(x, y)}$, demuestre que $\mathbf{f_x(0, 0)}$ y $\mathbf{f_y(0, 0)}$ existen y que $\mathbf{f(x, y)}$ no es diferenciable en $\mathbf{(0, 0)}$.**

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

En primer lugar calculamos las derivadas parciales en $(0, 0)$ mediante los límites que las definen:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Entonces las derivadas parciales primeras existen en $\mathbf{(0, 0)}$.

Para ver que no es diferenciable, veamos que es discontinua en (0,0):

Cuando $(x, y) \to (0,0)$, $(x, y) \neq (0,0)$, entonces $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

En consecuencia:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x\,y}{x^2 + y^2}$$

Como tanto numerador como denominador tienden a 0, se trata de una indeterminación. Para decidir sobre el carácter del límite procedemos a acercarnos al $(0, 0)$ mediante distintos caminos y vemos qué ocurre con el comportamiento de la función.

Probaremos una familia de rectas no verticales que pasen por el origen de coordenadas, de la forma $y = mx$

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = mx \text{, con } m \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x\,mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 m}{x^2(1 + m^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Como el resultado depende de la pendiente de la trayectoria lineal, distintas trayectorias producen distintos valores del límite y en consecuencia el límite no existe.

Al no tener límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ resulta que $f(x, y)$ es discontinua en $(0, 0)$.

Por la contra-recíproca del teorema que dice:

"Si una función $f(x, y)$ de dos variables es diferenciable en (x_0, y_0), entonces $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0)"

si la función es discontinua en $(0, 0)$, entonces la función **no es diferenciable en $\mathbf{(0, 0)}$**.

Observación: esto pone de manifiesto que la existencia de las derivadas parciales en el punto, si bien es condición necesaria para la diferenciabilidad (pues está intrínseco en la propia definición), no es condición suficiente.

La continuidad de las derivadas parciales en una región rectangular que contenga al punto es condición suficiente para la diferenciabilidad, pero no condición necesaria, ya que una función puede ser diferenciable en un punto aún cuando sus derivadas parciales no sean continuas en dicho punto, como lo veremos en el ejercicio 10.

7) **Dada $\mathbf{f(x,y) = x.e^y - y.\ln x}$, demuestre que es diferenciable en todo su dominio.**

El dominio de $f(x,y)$ es $D_f = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \ / \ x > 0\}$

$f(x,y)$ es continua en todo su dominio por ser suma de productos de funciones continuas en D_f.

Calculamos las derivadas parciales:

$$f_x(x,y) = e^y - \frac{y}{x}$$

$$f_y(x,y) = x.e^y - \ln x$$

Ambas derivadas parciales son continuas $\forall\ (x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0$ por ser sumas de productos y cocientes de funciones continuas, y el divisor del cociente no anularse en D_f. En consecuencia $f(x,y)$ es diferenciable en todo su dominio.

8) **Dada $\boldsymbol{z = f(x,y)}$, demuestre que es diferenciable en $\mathbf{(0,0)}$ utilizando el teorema de las derivadas primeras.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tenemos que comprobar que las derivadas parciales son continuas en una región rectangular que contenga a $(0,0)$.
En primer lugar calculamos las derivadas parciales en (0,0) utilizando los límites que las definen:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

En segundo lugar calculamos las derivadas parciales en $(x,y) \neq (0,0)$, mediante reglas de derivación, resultando:

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x^4\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

Por lo tanto, las funciones derivadas parciales quedan definidas a trozos por:

$$f_x(x,y) == \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) == \begin{cases} \dfrac{2x^4\,y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ambas funciones son continuas cuando $(x,y) \neq (0,0)$. Debemos verificar si lo son también en $(0,0)$.
Veamos qué pasa con $f_x(x,y)$:

a) $f_x(0,0) = 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

Estamos en presencia de una indeterminación. Para calcular el límite, recurrimos a coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{r\to 0} f_x(r.\cos\theta\,, r.\sin\theta) = \lim_{r\to 0}\frac{2(r.\cos\theta)(r.\sin\theta)^4}{[(r.\cos\theta)^2 + (r.\sin\theta)^2]^2}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{2r^5\cos\theta\,(\sin\theta)^4}{r^4\,[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2]^2} = \lim_{r\to 0} 2\,r\cos\theta\,(\sin\theta)^4 = 0$$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$

En consecuencia, $f_x(x,y)$ es continua en (0,0).

De manera análoga se verifica que $f_y(x,y)$ también es continua en (0,0).

En consecuencia, las derivadas parciales primeras resultan ser funciones continuas en una región rectangular que contiene a $(0,0)$, por consiguiente $\mathbf{f(x,y)}$ **es diferenciable en** $(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

9) **Dada la función del ejercicio anterior, demuestre que es diferenciable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ utilizandola definición.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Debemos demostrar que el incremento de la función, en el punto $(0,0)$ se puede escribir como:

$$\Delta z = f_x(0,0).\Delta x + f_y(0,0).\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y).\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y).\Delta y$$

donde $\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)$ son funciones que tienen límite 0 cuando $(\Delta x,\Delta y) \to (0,0)$.
Ya vimos en el ejercicio anterior que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$
Calculemos el incremento en (0,0):

$$\Delta z = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Reescribimos convenientemente la expresión anterior:

$$\Delta z = \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2} + \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Y podemos escribir:

$$\Delta z = 0.\Delta x + 0.\Delta y + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\Delta x + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\Delta y$$

Llamando:

$$\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{2}\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\,;\ \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Resulta:

$$\Delta w = 0.\Delta x + 0.\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

Se puede demostrar que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = 0 \text{ y } \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$$

(El cálculo queda para que lo complete el lector)

En consecuencia se concluye que $\mathbf{f(x,y)}$ **es diferenciable en (0,0).**

Observación: en los ejercicios 8 y 9 se demostró que una función dada es diferenciable en un punto mediante dos métodos distintos. No es necesario realizar ambos.

10) **Dada $\mathbf{z = f(x,y)}$, demuestre que f(x, y) es diferenciable en $\mathbf{(0,0)}$ aunque sus derivadas parciales no son continuas en $\mathbf{(0,0)}$**

$$z = f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para ver que es diferenciable en $(0,0)$, vamos a demostrar que el incremento de la función, en el punto (0,0), se puede escribir como:

$$\Delta z = f_x(0,0).\Delta x + f_y(0,0).\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y).\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y).\Delta y$$

donde $\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)$ son funciones que tienen límite 0 cuando $(\Delta x,\Delta y) \rightarrow (0,0)$.

Para ello calculamos, mediante el límite que las define, las derivadas parciales en (0,0):

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}} = 0$$

Ahora calculamos el incremento en (0,0):

$$\Delta z = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

Reescribiendo convenientemente:

$$\Delta z = 0.\Delta x + 0.\Delta y + \left(\Delta x\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)\Delta x + \left(\Delta y\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)\Delta y$$

Llamando:

$$\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \Delta x\sin\tfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\,;\ \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = \Delta y\,sin\tfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

resulta:

$$\Delta z = 0.\Delta x + 0.\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

Se puede demostrar que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = 0 \quad ; \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$$

(El cálculo queda para que lo complete el lector)

En consecuencia se concluye que $\mathbf{f(x,y)}$ **es diferenciable en (0,0).**

Veamos ahora que la derivada parcial con respecto a x no es continua en (0,0). Para ello calculamos la derivada parcial cuando $(x,y) \neq (0,0)$ mediante reglas de derivación:

$$f_x(x,y) = 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Como previamente calculamos la derivada parcial en (0,0), la función "derivada parcial respecto de x" queda definida por:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analicemos su continuidad en (0,0):

a) $f_x(0,0) = 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

El primer término tiene a 0, pues $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$, y está multiplicando a una función cuyo valor está acotado al intervalo $[-1,1]$.

Para analizar el comportamiento del segundo término, nos acercamos mediante una familia de rectas no verticales que pasen por el origen de coordenadas, de la forma $y = mx$

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = mx \text{, con } m \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y) \in S_1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+(mx)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|\sqrt{1+m^2}} \cos\frac{1}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{signo}(x)}{\sqrt{1+m^2}} \cos\frac{1}{|x|\sqrt{1+m^2}}$$

El primer factor $\frac{\text{signo}(x)}{\sqrt{1+m^2}}$, no tiene límite pues es una cantidad distinta de 0, cuyo signo depende del signo mediante el cual x se aproxima a 0. El segundo factor tampoco tiene límite pues se trata de un coseno cuyo argumento crece indefinidamente cuando $x \to 0$ por lo cual sus valores oscilaran entre $[-1,1]$.

En consecuencia $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \nexists$ => $f_x(x,y)$ es discontinua en (0,0). De modo similar se puede demostrar la discontinuidad de $f_y(x,y)$ en (0, 0).

Por lo tanto **las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$**.

No se puede afirmar la diferenciabilidad de la función en dicho punto por el teorema de continuidad de las derivadas primeras. No obstante esto, previamente verificamos que la función sí es diferenciable aplicando la definición (o sea el Teorema de la incrementos finitos).

Este ejemplo muestra que el teorema de la continuidad de las derivadas primeras es una **condición suficiente** para la diferenciabilidad, pero **no necesaria**.

11) **Dada $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, analice la diferenciabilidad en $(0,0)$.**

En primer lugar calculemos las derivadas parciales.

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Las derivadas parciales no existen en (0,0). En consecuencia **$f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$** pues la propia definición implica tácitamente la existencia de las derivadas parciales en el punto.

Observación: un error común en este ejercicio es afirmar que la función no es diferenciable por no ser continuas las derivadas parciales en el punto. Esto es incorrecto pues ya vimos que esta condición es suficiente, pero no necesaria.

4. *Ejercicios de aplicación*

1. Cálculo de material

Un envase metálico cerrado tiene la forma de cilindro circular recto con una altura interior **h = 15 cm**, un radio interior **r = 5 cm** y un **espesor** de pared lateral, fondo y tapa de **0,1 cm**. Calcular

a) La cantidad exacta de material necesaria para fabricar el envase;
b) La cantidad aproximada de material necesaria para fabricar el envase;
c) Comparar los resultados obtenidos e indicar el error cometido en el cálculo aproximado.

Para resolver el ejercicio debe estudiarse la función de volumen de un cilindro: $V = \pi\, r^2 h\ [cm^3]$

a) Como el envase es cerrado debe considerarse el espesor de la tapa y del fondo como magnitud del incremento de la altura => Δh = 0,2; en tanto que el incremento del radio será Δh = 0,1. Por lo tanto la cantidad exacta de material será:

$$\Delta V = f(r + \Delta r\,; h + \Delta h) - f(r, h)$$

$$\Delta V = \pi\,[(r + \Delta r)^2 . (h + \Delta h)] - \pi\, r^2 h$$

Para los valores indicados en el enunciado se tiene:

$$\Delta V = \pi\,[(5{,}1)^2 . (15{,}2)] - \pi\, 5^{\,2} . 15\ [cm^3]$$

$$\Delta V = \pi . 395{,}352 - \pi . 375 = 20{,}352\,\pi\ [cm^3]$$

b) Para determinar la cantidad aproximada de material debe utilizarse el diferencial total de la función:

$$dV = V_r(r, h) . dr + V_h(r, h) . dh$$

$$dV = 2\,\pi\, r\, h\, dr + \pi\, r^2\, dh$$

reemplazando los valores indicados se tiene:

$$dV = 2\,\pi\, 5 . 15 . (0{,}1) + \pi\, 5^2\ (0{,}2) = 20\,\pi\ [cm^3]$$

c) El error cometido al realizar el cálculo aproximado es: $\varepsilon = \Delta V - dV = 20{,}352\,\pi - 20\,\pi = 0{,}352\,\pi\ [cm^3]$

2. Estudio de un gas ideal

La presión, el volumen y la temperatura de un mol de un gas ideal están relacionados mediante la ecuación:

$$PV = 8{,}31\ T$$

donde P se mide en [kilopascales]; V en [litros] y T en [º Kelvin]. Usando ΔP y dP determinar el cambio exacto y el cambio aproximado de la presión si el volumen aumenta de 12 litros a 12,3 litros y la temperatura disminuye de 310 ºK a 305ºK. Campare los resultados.

La función a estudiar es: $P = 8{,}31\,\frac{T}{V}$ siendo $\Delta T = -5\ ºK$ y $\Delta V = 0{,}3$ litros

a) Cálculo exacto de la variación de la presión:

$$\Delta \mathrm{P} = 8{,}31\,\frac{(\mathrm{T} + \Delta \mathrm{T})}{(\mathrm{V} + \Delta \mathrm{V})} - 8{,}31\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}}$$

$$\Delta \mathrm{P} = 8{,}31\,\frac{(305)}{(12{,}3)} - 8{,}31\,\frac{310}{12} = 206{,}06 - 214{,}67\ [\text{kilopascales}] = -8{,}615\ [\text{kilopascales}]$$

b) Cálculo aproximado de la variación de la presión:

$$\mathrm{dP} = \mathrm{P_T}(\mathrm{T}, \mathrm{V}).\mathrm{dT} + \mathrm{P_V}(\mathrm{T}, \mathrm{V}).\mathrm{dV}$$

expresión en la cual: $\mathrm{P_T} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{T}} = \frac{8{,}31}{\mathrm{V}}$ y $\mathrm{P_V} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}} = -\frac{8{,}31\,\mathrm{T}}{\mathrm{V}^2}$

para los valores indicados se tiene:

$$\mathrm{dP} = 8{,}31\,\frac{(-5)}{12} - 8{,}31(310).\frac{(0{,}3)}{(12)^2} = -3{,}46 - 5{,}366 = -8{,}826$$

El error cometido al realizar el cálculo aproximado de la variación de la presión es:

$$\varepsilon = \Delta \mathrm{P} - \mathrm{dP} = -8{,}615 - (-8{,}826) = 0{,}2118$$

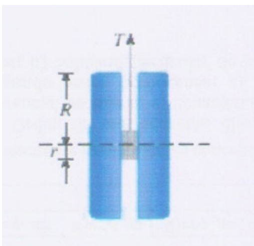
3. Tensión en una cuerda

La tensión T en la cuerda de un yo-yo como el mostrado en la figura está dada por la función:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{m\,g\,R}}{2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2}$$

donde **m** es la masa del yo-yo; **g** es la aceleración de la gravedad, **R** es el radio mayor y **r** son el radio menor del yo-yo, respectivamente.

Utilice diferenciales para **estimar** la variación de la tensión si el radio mayor **R** crece de 3 cm a 3,1 cm y el radio mero **r** crece de 0,7 a 0,8 cm. ¿La tensión T crece o disminuye?



Como el enunciado pide "estimar" la variación de la tensión en la cuerda usando diferenciales entonces:

$$\mathrm{dT} = \mathrm{T_R}(\mathrm{R}, \mathrm{r}).\mathrm{dR} + \mathrm{T_r}(\mathrm{R}, \mathrm{r}).\mathrm{dr}$$

con $\mathrm{dR} = 0{,}1$ cm y $\mathrm{dr} = 0{,}1$ cm.

Las respectivas derivadas parciales de la tensión respecto de R y r son:

$$\mathrm{T_R}(\mathrm{R}, \mathrm{r}) = \frac{\mathrm{mg}\,(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2) - \mathrm{mg\,R\,2R}}{[(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2)]^2} \quad ; \quad \mathrm{T_r}(\mathrm{R}, \mathrm{r}) = \frac{-\,\mathrm{mg\,R\,4\,r}}{[(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2)]^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{dT} = \left\{\frac{\mathrm{mg}\,(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2) - \mathrm{mg\,R\,2R}}{[(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2)]^2}\right\}\mathrm{dR} + \left\{\frac{-\,\mathrm{mg\,R\,4\,r}}{[(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2)]^2}\right\}\mathrm{dr}$$

$$\mathrm{dT} = \frac{\mathrm{mg}}{[(2\,\mathrm{r}^2 + \mathrm{R}^2)]^2}\,[(2\,\mathrm{r}^2 - \mathrm{R}^2)\mathrm{dR} - 4\,\mathrm{R\,r\,dr}]$$

Para determinar si la tensión crece o disminuye, como la fracción que es factor común en la expresión anterior es positiva, deberá analizarse el signo del resultado del corchete en la misma expresión. Para los valores indicados se tiene:

$$[(2\,r^2 - R^2)dR - 4\,R\,r\,dr] = [2\,(0{,}7)^2 - 3^2](0{,}1) - 4.3.0{,}7\,(0{,}1) = -0{,}802 - 0{,}84 = -1{,}642$$

Por lo tanto la tensión de la cuerda disminuye.

4. Gravedad específica

La gravedad específica **S** de un cuerpo está determinada por la función:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} - \mathbf{W}}$$

expresión en la que **A** es el peso del cuerpo en el aire y **W** es el peso del cuerpo en el agua. Si el valor de **A** es de 20 libras con un error (en valor absoluto) de **dA** = 0,01 libras y el valor de **W** es de 12 libras con un error (en valor absoluto) de **dW** = 0,02 libras, calcular aproximadamente el mayor error posible en la medición de **S**.

Como el enunciado indica que los errores son en valor absoluto deben considerarse diversas posibilidades según sean esos errores positivos o negativos. Además se utilizará el diferencial total de la función dado que el enunciado pide un cálculo aproximado.

Como $|\mathrm{dA}| = 0{,}01$ libras => $\mathrm{dA} = \pm 0{,}01$. De la misma manera: $|\mathrm{dW}| = 0{,}02$ libras => $\mathrm{dW} = \pm 0{,}02$

El diferencial de S es:

$$dS = S_A(A, W).\,dA + S_W(A, W).\,dW$$

$$S_A(A, W) = \frac{-W}{(A-W)^2} \ ; \ S_W(A, W) = \frac{A}{(A-W)^2}$$

$$dS = \frac{-W}{(A-W)^2}\ dA + \frac{A}{(A-W)^2} dW = \frac{(-W\,dA + A\,dW)}{(A-W)^2}$$

a) Primera medición, con ambos diferenciales positivos:

$$dA = +0{,}01 \ ; \quad dW = +0{,}02$$

$$dS = \frac{(-W\,dA + A\,dW)}{(A-W)^2} = \frac{-12\,(0{,}01) + 20\,(0{,}02)}{(0{,}01 - 0{,}02)^2} = \frac{0{,}28}{0{,}0001} = 2800$$

b) Segunda medición con:

$$dA = +0{,}01 \ ; \quad dW = -0{,}02$$

$$dS = \frac{(-W\,dA + A\,dW)}{(A-W)^2} = \frac{-12\,(0{,}01) + 20\,(-0{,}02)}{(0{,}01 + 0{,}02)^2} = \frac{-0{,}52}{0{,}0009} = -577{,}77$$

c) Tercera medición con:

$$dA = -0{,}01 \ ; \quad dW = +0{,}02$$

$$dS = \frac{(-W\,dA + A\,dW)}{(A-W)^2} = \frac{-12\,(-0{,}01) + 20\,(+0{,}02)}{(-0{,}01 - 0{,}02)^2} = \frac{0{,}52}{0{,}0009} = 577{,}77$$

d) Cuarta medición con:

$$dA = -0{,}01 \ ; \quad dW = -0{,}02$$

$$dS = \frac{(-W\,dA + A\,dW)}{(A-W)^2} = \frac{-12\,(-0{,}01) + 20\,(-0{,}02)}{(-0{,}01 + 0{,}02)^2} = \frac{-0{,}28}{0{,}0001} = -2800$$

Por lo tanto el mayor error, en valor absoluto, en la medición aproximada de la variación de la gravedad específica **S** estará dado por las mediciones primera y cuarta.

5. *Ejercicios propuestos*

1) Sea $z = f(x,y) = 3x^2 - xy$

a) Suponiendo que los incrementos de x e y son Δx y Δy respectivamente, determinar Δz

b) Aplicar Δz para calcular el cambio en $f(x,y)$ cuando (x,y) varía de $(1,2)$ a $(1{,}01; 1{,}98)$

c) Encontrar dz y usarla para calcular aproximadamente el cambio en w cuando (x,y) varía de (1, 2) a (1,01; 1.98). ¿Cómo es esta estimación comparada con el cambio exacto en z?

d) Obtener expresiones para ε_1 y ε_2 que satisfagan el Teorema de los Incrementos finitos.

2) Dada $z = f(x,y) = 4x^2 + 6xy + 2y^2$

a) Hallar la variación exacta de la función cuando pasa de (x,y) a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$

b) Hallar la variación aproximada considerando $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$

c) Hallar el incremento y la diferencial total evaluados en el punto $P(1{,}01;\ 4{,}02)$.

3) Usar diferenciales para calcular aproximadamente el cambio en las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = x^2 z^3 - 3y z^2 + x^{-3} + 2z\, y^{1/2}$ cuando el valor de (x,y,z) varía de $P: (1,4,2)$ a $Q: (1{,}02;\ 3{,}97;\ 1.96)$

b) $f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ cuando varía de $P: (-2,3)$ a $Q: (-2{,}02;\ 3{,}01)$.

4) Encontrar los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen el Teorema de los Incrementos finitos

a) $f(x,y) = (2x - y)^2$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3$

5) Determinar dz para:

a) $z = xe^{2y} + e^{-y}$

b) $z = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$

c) $w = x^2 e^{yz} + y \ln z$

6) Dada la función $f(x,y) = -\sqrt{3x^2 + 2y^2}$

a) Analizar la continuidad en el punto $P(0,0)$

b) Estudiar la diferenciabilidad en el punto $P(0,0)$ y fuera del punto.

7) Dada las siguientes funciones, analizar la diferenciabilidad de las mismas en sus respectivos dominios:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8) Calcular, de manera exacta y de manera aproximada, la cantidad de material necesaria para construir un recinto cerrado con forma de paralelepípedo rectangular, sabiendo que las dimensiones del recinto son: a = 8 m; b = 4 m y c = 3 m con un espesor de paredes, techo y piso de e = 0,20 m.
Compárese el error cometido en el cálculo aproximado e indique si es o no es aceptable.

9) El área de un rectángulo de largo **L** y altura **h** es **A = L.h**. Utilizar incrementos y diferenciales para determinar la variación exacta y la variación aproximada cuando la longitud se incrementa en ΔL y la altura de incrementa en Δh.
a) Construya una representación gráfica que permita identificar qué región de dicha gráfica representa **ΔA**; qué región de esa gráfica representa a **dA** y que región de esa gráfica representa el error **ε** cometido en el cálculo aproximado.
b) Valorizar para: $L = 30$ cm ; $h = 12$ cm ; $\Delta L \approx dL = 0{,}3$ cm ; $\Delta h \approx dh = 0{,}15$ cm.

10) Trace un rectángulo de longitud L y altura h.
a) Dibuje una estrecha franja adosada al rectángulo que corresponda a un pequeño aumento de su longitud;
b) Dibuje otra estrecha franja adosada al rectángulo que corresponda a un pequeño aumento de su altura;
c) En base a lo realizado en los puntos (a) y (b) determine cuál de las dos medidas tiene mayor efecto en la variación del área del rectángulo;
d) Verifique analíticamente la respuesta indicada en el punto anterior si: $L = 6$ cm; $h = 1$ cm; $dL = 0{,}01$ cm y $dh = 0{,}01$ cm.

11) El índice de temperatura (o sensación térmica) está modelado por la función:

$$\mathbf{W = 13{,}12 + 0{,}6215\ T - 11{,}37\ v^{0{,}16} + 0{,}3965\ T\ v^{0{,}16}}$$

donde T en la temperatura, en ºC, y v la velocidad del viento en km/hora. La velocidad del viento es de 26 km/h con un error posible de ± 2 km/h y la temperatura es de – 11 ºC con un error posible de ± 1 ºC.
Utilice diferenciales para **estimar** el máximo error posible en el valor de **W** debido a los errores de medición de T y v.

6. *Bibliografía*

- *Cálculo con Geometría Analítica*, de Earl W. Swokowski
- *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, de James Stewart.
- *Cálculo y Geometría Analítica*, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- *El Cálculo*, de Louis Leithold.
- *Matemática Superior para Ingenieros y Físicos*, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff