TP Nº 1 – Ecuaciones diferenciales

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018).

Segunda Parte: Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

1. *Temario*

- Reducibles a primer orden
- Homogéneas
  - Con condiciones iniciales
- Método de los coeficientes indeterminados
  - Con condiciones iniciales
- Incompletas
- Método Variación de Parámetros

2. *Presentación teórica*

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden reducibles a primer orden por ausencia de x ó y

a) Sea una EDO de segundo orden de la forma $F(x, y', y'') = 0$.

Como en la EDO está ausente y, se puede reducir el orden de la EDO mediante la sustitución $p = y'$ con lo cual $p' = y''$.
Reemplazando en la EDO, resulta $F(x, p, p') = 0$. Esta EDO es de primer orden, se resuelve obteniendo $p(x)$ y luego se encuentra $y(x)$ mediante $y(x) = \int p(x).dx$

b) Sea una EDO de segundo orden de la forma $F(y, y', y'') = 0$.

Como en la EDO está ausente x, se puede reducir el orden de la EDO mediante la sustitución $p = y'$, pero ahora, teniendo en cuenta que deseamos que resulte una EDO en la variable independiente y, y la variable dependiente p, necesitamos que las derivadas de p sean respecto de y.
Por ello, como $y' = p$, entonces $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, pero aplicando Regla de la Cadena

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p'.p$$

Entonces reemplazando $y' = p$ e $y'' = p'.p$ en la EDO, resulta $F(y, p, p'p) = 0$. Esta EDO de primer orden se resuelve hallándose $p(y, C_1)$. Finalmente, como $p = y' = \frac{dy}{dx}$, será: $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Es una ecuación de la forma: $a.y'' + b.y' + c.y = f(x)$ con $a,\ b$ y c constantes, y $f(x)$ función continua.

Homogénea

Si $f(x) = 0$ la ecuación es homogénea y su solución general será $y_{GH} = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x)$, con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones particulares de la EDO y linealmente independientes, es decir, forman una base o sistema fundamental de soluciones de la EDO.

Para hallarlas, se propone $y_1(x) = e^{rx}$ que reemplazado junto a sus derivadas primera y segunda en la EDO conduce a la condición $a.r^2 + b.r + c = 0$ (Ecuación Característica).

Según cómo sean las raíces de la Ecuación Característica surgen los siguientes casos para la solución general:

r_1 y r_2	Solución general
Reales y distintas	$y_{GH} = C_1.e^{r_1x} + C_2.e^{r_2x}$
Reales y coincidentes	$y_{GH} = C_1.e^{r_1x} + C_2.x.e^{r_1x}$
Complejas conjugadas $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_{GH} = e^{\alpha x}(A.\cos\beta x + B.\sin\beta x)$

Completa

Si $f(x) \neq 0$ la ecuación es completa y su solución general será $y = y_{GH}(x) + y_P(x)$ con $y_{GH}(x)$ es solución general de la correspondiente EDO homogénea, y $y_P(x)$ solución particulares de la EDO completa.

Para hallar $y_P(x)$ tenemos los siguientes métodos:

Método de los coeficientes indeterminados

Se ensaya para $y_P(x)$ una función, en general de la misma forma que $f(x)$

a) Si $f(x) = P_n(x)$, es un polinomio de grado n, se ensaya otro polinomio del mismo grado $y_P(x) = Q_n(x)$, donde los coeficientes indeterminados son los coeficientes del polinomio $Q_n(x)$.

Si cero es raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea con multiplicidad h entonces se ensaya $y_P(x) = x^h.Q_n(x)$.

b) Si $f(x) = A.e^{kx}$, es una función exponencial, se ensaya $y_P(x) = B.e^{kx}$

Si *k* es raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea con multiplicidad h, se ensaya $y_P(x) = x^h.B.e^{kx}$

c) Si $f(x) = A.\cos\alpha x + B.\sin\alpha x$, es combinación lineal de senos y cosenos, entonces se ensaya como $y_P(x) = C.\cos\alpha x + D.\sin\alpha x$.

Si "αi" es raíz de la ecuación característica con multiplicidad h se ensaya $y_P(x) = x^h(C.\cos\alpha x + D.\sin\alpha x)$

d) Si $f(x)$ es suma de dos ó más casos de los enunciados, se propone una $y_P(x)$ que sea suma de las propuestas para cada uno de los respectivos casos.
e) Si $f(x)$ es producto de dos o más casos de los enunciados, se propone una $y_P(x)$ que sea el producto de las propuestas para cada uno de los respectivos casos. En este caso el criterio para multiplicar la propuesta por x^h se condiciona a fin de lograr que, al realizar las propiedades distributivas de los productos planteados, cada término resultante sea linealmente independiente de cada uno de los términos de las solución general de la ecuación homogénea.

<u>Importante</u>: la solución de una EDO de segundo orden no homogénea será siempre la suma de la solución general de la EDO Homogénea más la solución particular de la EDO no homogénea:

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_{PC}(x)$$

Método de variación de parámetros (de Lagrange)

Dada la EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes $a.y'' + b.y' + c.y = f(x)$

Se supone que la solución general es de la forma $y_{PC} = u(x).y_1(x) + v(x).y_2(x)$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea asociada y $u(x)$ y $v(x)$ son funciones a determinar.

Reemplazando la función propuesta y sus derivadas primera y segunda en la ecuación, se llega a establecer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u'(x).y_1(x) + v'(x).y_2(x) = 0 \\ u'(x).y'_1(x) + v'(x).y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

El sistema se resuelve tomando como incógnitas a $u'(x)$ y $v'(x)$. El determinante del sistema se denomina Wronskiano y debe ser distinto de cero, por ser $y_1(x)$ y $y_2(x)$ linealmente independientes.

Luego, por integración se obtienen $u(x)$ y $v(x)$. Finalmente se reemplazan en $y_{PC} = u(x).y_1(x) + v(x).y_2(x)$, que – sumada a la solución general de la EDO Homogénea – nos da la solución general de la EDO completa.

3. *Ejercicios resueltos*

1) Resolver la EDO lineal de segundo orden reduciendo a primer orden

$$xy'' + y' = 0$$

Como está ausente la variable dependiente y, hacemos $p = y'$, con lo cual $p'' = y'$.

Reemplazando en la EDO resulta $xp' + p' = 0$, EDO de primer orden que se resuelve por Variables Separables, cuya solución es $p = \frac{C_1}{x}$.

Luego, como $p = y'$, resultará $y' = \frac{C_1}{x}$. Resolviendo esta EDO por variables separables, obtenemos la solución

$\boxed{y = C_1.\ln x + C_2}$ Solución General

2) Resolver la EDO lineal de segundo orden reduciendo a primer orden

$$yy'' = (y')^2$$

Como está ausente la variable dependiente x, hacemos $p = y'$, con lo cual $y'' = p'.p$.
Reemplazando en la EDO resulta $yp'p = p^2$, EDO de primer orden que se resuelve por variables separables, cuya solución es $p = C_1 y$.

Luego, como $p = y'$, resultará $y' = C_1 y$. Resolviendo esta EDO por variables separables, obtenemos la solución:

$\boxed{y = C_2 . e^{C_1 x}}$ Solución General

3) Resolver la EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Para resolverla, la ecuación característica resulta:
$r^2 + r - 6 = 0$,
Cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -3$
En consecuencia, por tratarse de raíces de la ecuación características reales y distintas, la solución general será:

$\boxed{y_{GH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}}$ Solución General

4) Encontrar la solución particular de la EDO del ejercicio anterior para:

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Derivando la Solución General encontrada y evaluando la solución y su derivada en $x = 0$, resulta:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = 2.C_1 - 3.C_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenemos

$$C_1 = \frac{3}{5},\quad C_2 = \frac{2}{5}$$

Resultando:

$\boxed{y_P = \frac{3}{5} e^{2x} + \frac{2}{5} e^{-3x}}$ Solución Particular

5) Resolver la EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes

$$4\,y'' + 12\,y' + 9\,y = 0$$

En este caso, la ecuación característica resulta:

$$4\,r^2 + 12\,r + 9 = 0$$

Que tiene solución única $r = -\frac{3}{2}$. Por tener solución única la ecuación característica, la solución general será:

$\boxed{y_{GH} = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 x\, e^{-\frac{3}{2}x}}$ Solución General

6) Resolver la EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes

En este caso, la ecuación característica resulta:

$$r^2 - 6\,r + 13 = 0$$

cuyas soluciones son complejas: $r_1 = 3 + 2\,i$, $r_2 = 3 - 2\,i$, con $\alpha = 3$, $\beta = 2$, entonces la solución general será:

$$\boxed{y_{GH} = e^{3x}[A.\cos(2x) + B.\sin(2x)]}$$

7) Resolver la EDO lineal de segundo orden no homogénea ó completa con coeficientes constantes

$$y'' + y' - 2\,y = x^2$$

a. En primer lugar buscamos la solución general de la EDO homogénea.

$$y'' + y' - 2\,y = 0$$

Su ecuación característica es $r^2 + r - 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, resultando:

$\boxed{y_{GH} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}}$ Solución General de la EDO Homogénea

b. En segundo lugar se busca una solución particular de la EDO Completa.

$$y'' + y' - 2\,y = x^2$$

Como $f(x) = x^2$, se propone un polinomio de grado 2. Como cero no es raíz de la ecuación característica de la EDO Homogénea, no es necesario multiplicar la solución particular por x.

$$y_P = Ax^2 + Bx + C$$

Entonces:

$$y'_P = 2Ax + B \text{ y } y''_P = 2A$$

Sustituyendo en la EDO tendremos:

$$(2A) + (2Ax + B) - 2\,(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Reagrupando términos semejantes en el primer miembro:

$$-2\,Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Por tratarse de una igualdad de polinomios, igualamos coeficientes de términos de igual grado:

$$\begin{cases} -2\,A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es: $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{4}$

Por lo que la Solución particular de la EDO Completa será:

$$y_P = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$ Solución Particular de la EDO No Homogénea

c. Finalmente, la solución general de la EDO Completa será :

$$\boxed{y_{GC} = y_{GH} + y_P = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}$$ Solución General de la EDO Completa

d. Si la ecuación hubiera sido $y'' + y' = x^2$, por ser cero raíz de la ecuación característica de la EDO Homogénea ($r^2 + r = 0$), se hubiera propuesto como solución particular de la completa

$$y_P = (Ax^2 + Bx + C).x$$

Verifique y complete el ejercicio.

Observación: en caso de tener una EDO de segundo orden completa con condiciones iniciales, para obtener la solución particular correspondientes a dichas condiciones iniciales las mismas deben aplicarse a la solución general de la EDO completa $y_{GC} = y_{GH} + y_{PC}$, así como a su derivada primera $y'_{GC} = y'_{GH} + y'_{PC}$

8) Resolver EDO lineal de segundo orden no homogénea (o completa) con coeficientes constantes

$$y'' + 4.y = e^{3x}$$

a. En primer lugar buscamos la solución general de la EDO homogénea.

$$y'' + 4.y = 0$$

Su ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 2i$ y $r_2 = -2i$, resultando:

$$\boxed{y_{GH} = A.\cos(2x) + B.\sin(2x)}$$ Solución General de la EDO Homogénea

b. En segundo lugar se busca una solución particular de la EDO Completa.

$$y'' + 4.y = e^{3x}$$

Como $f(x) = e^{3x}$, es una exponencial con $k = 3$, se propone una exponencial con $k = 3$. Como $k = 3$ no es raíz de la ecuación característica de la EDO Homogenea, no es necesario multiplicar la solución particular por x.

$$y_P = C.e^{3x}$$

Entonces:

$y'_P = 3.C.e^{3x}$, y $y''_P = 9.C.e^{3x}$

$$9.C.e^{3x} + 4.C.e^{3x} = e^{3x}$$

Agrupando términos semejantes en el primer miembro:

$$13.C.e^{3x} = e^{3x}$$

La igualdad se verifica si: $13.C = 1$, por lo que $C = \frac{1}{13}$

Por lo que la Solución particular de la EDO Completa será:

$y_P = \frac{1}{13}.e^{3x}$ Solución Particular de la EDO No Homogénea

c. Finalmente, la solución general de la EDO Completa será :

$\boxed{y_{GC} = A.\cos(2x) + B.\sin(2x) + \frac{1}{13}.e^{3x}}$ Solución General de la EDO Completa

d. Si la ecuación hubiera sido $y'' + 4.y = e^{2x}$, por ser $k = 2$ raíz de la ecuación característica de la EDO Homogénea, se hubiera propuesto como solución particular de la completa

$$y_P = C.x.e^{2x}$$

Verifique y complete el ejercicio.

9) Resolver la EDO lineal de segundo orden no homogénea (o completa) con coeficientes constantes.

$$y'' + y' - 2.y = \sin(x)$$

a. En primer lugar buscamos la solución general de la EDO homogénea.

$$y'' + y' - 2.y = 0$$

En el ejercicio 7 vimos que la ecuación característica es $r^2 + r - 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, resultando:

$\boxed{y_{GH} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}}$ Solución General de la EDO Homogénea

b. En segundo lugar se busca una solución particular de la EDO Completa.

$$y'' + y' - 2.y = \sin(x)$$

Como $f(x) = sen(x)$, es una función seno (ó coseno) con $\alpha = 1$, se propone

$$y_P(x) = A.\cos x + B.\sin x$$

Si $r = \pm\alpha i$ (complejo con parte real nula) fuera raíz de la ecuación característica, habría que multiplicar la propuesta por x.

$$y'_P(x) = -A.\sin x + B.\cos x$$

$$y''_P(x) = -A.\cos x - B.\sin x$$

Sustituyendo en la EDO:

$$(-A.\cos x - B.\sin x) + (-A.\text{sen}\, x + B.\cos x) - 2(A.\cos x + B.\sin x) = \sin(x)$$

Agrupando términos:

$$(-3A+B)\cos x + (-A-3B)\sin(x) = \sin(x)$$

Igualdad que se cumple si: $\begin{cases} -3A+B=0 \\ -A-3B=1 \end{cases}$

Y su solución es: $A = -\frac{1}{10}$; $B = -\frac{3}{10}$

Por lo que la Solución particular de la EDO Completa será

$$y_P(x) = -\frac{1}{10}.\cos x - \frac{3}{10}.\sin x$$ Solución Particular de la EDO No Homogénea

c. Finalmente, la solución general de la EDO Completa será :

$$\boxed{y_{GC} = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{10}.\cos x - \frac{3}{10}.\sin x}$$ Sol.Gral. de la EDO Completa

d. Si la ecuación hubiera sido $y'' + y = \sin(x)$, por ser $r = \pm\alpha i = \pm i$ raíz de la ecuación característica de la EDO Homogénea ($r^2 + 1 = 0$), se hubiera propuesto como solución particular de la completa

$$y_P(x) = (A.\cos x + B.\sin x).x = A.x.\cos x + B.x.\sin x$$

Verifique y complete el ejercicio.

10) Resolver la EDO lineal de segundo orden no homogénea (o completa) con coeficientes constantes.

$$y'' + y' - 2y = x^2 + \sin(x)$$

a. En primer lugar buscamos la solución general de la EDO homogénea.

$$y'' + y' - 2.y = 0$$

En el ejercicio 7 vimos que ecuación característica es $r^2 + r - 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, resultando:

$$\boxed{y_{GH} = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}}$$ Solución General de la EDO Homogénea

b. En segundo lugar se busca una solución particular de la EDO Completa.

$$y'' + y' - 2y = x^2 + \sin(x)$$

Como $f(x) = x^2 + sen(x)$, es una suma de una función polinómica y una función seno (ó coseno) con $\alpha = 1$, se propone una suma de las propuestas para cada uno de los casos. Es decir:

$$y_P = (Ax^2 + Bx + C) + [D\sin(x) + E\cos(x)]$$

(Observación: si cero fuera raíz de la ecuación característica se debería multiplicar el primer paréntesis por x, o si $\pm i$ lo fuera, se debería multiplicar el segundo paréntesis por x)

Se hallan y'_P e y''_P y se reemplazan en la EDO para hallar las constantes A, B, C, D y E.

También se pueden trabajar las soluciones particulares por separado:

$$y_{P1} = Ax^2 + Bx + C$$
$$y_{P2} = D\sin(x) + E\cos(x)$$

derivando y reemplazando en las EDO correspondientes a ambos términos de $f(x)$ por separado:

$$y'' + y' - 2.y = x^2$$

$$y'' + y' - 2.y = \sin(x)$$

y luego reunir los resultados.

En nuestro caso, ambos EDO por separado se corresponden con los ejemplos 7 y 9, por lo cual utilizamos los resultados ya encontrados y la solución particular resulta:

$$\boxed{y_P = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{10}.\cos x - \frac{3}{10}.\sin x}$$

c. Finalmente, la solución general de la EDO Completa será :

$$\boxed{y_{GC} = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{10}.\cos x - \frac{3}{10}.\sin x}$$

11) Proponer una solución particular para:

$$y'' + 2y' + 4.y = x.cos(3x)$$

Como $f(x) = x.cos(3x)$, es un producto de una función polinómica y una función seno (ó coseno) , se propone como solución particular un producto de una función polinómica del mismo grado y una suma de funciones senos y cosenos.

$$y_P = (Ax + B)\sin(3x) + (Cx + D)cos(3x)$$

$$y_P = A.x.\sin(3x) + B.\sin(3x) + C.x.cos(3x) + D.cos(3x)$$

Se deben disponer las constantes necesarias para que no haya redundancia.

Si al distribuir los productos, algún término tuviera la misma forma que algún término de la Solución General de la EDO Homogénea, se debería multiplicar la propuesta por x (nótese que en este caso, si $x = 0$ fuera raíz de la ecuación característica, no es necesario multiplicar la propuesta por x).

Complete el ejercicio determinando el valor de las constantes.

12) Resolver por el método de variación de parámetros

$$y'' + y' - 2.y = 2x\,e^{-3x}$$

a. En primer lugar buscamos dos soluciones particulares linealmente independientes de la EDO homogénea.

$$y'' + y' - 2.y = 0$$

En el ejercicio 7 vimos que la ecuación característica asociada es $r^2 + r - 2 = 0$, cuyas raíces son reales y distintas: $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, resultando:

$y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-2x}$ Soluciones particulares de la EDO Homogénea

b. En segundo lugar se propone la solución general de la EDO completa

$$y'' + y' - 2.y = 2x\, e^{-3x}$$

$$y_{GC} = u(x).e^x + v(x).e^{-2x}$$

Como se vió en la introducción teórica, se llegará al sistema:

$$\begin{cases} u'(x).y_1(x) + v'(x).y_2(x) = 0 \\ u'(x).y'_1(x) + v'(x).y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Que en este caso será:

$$\begin{cases} u'(x).e^x + v'(x).e^{-2x} = 0 \\ u'(x).e^x + v'(x).(-2e^{-2x}) = 2x\, e^{-3x} \end{cases}$$

Verificamos el Wronskiano distinto de cero:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0$$

Resolvemos el sistema por Regla de Cramer:

$$u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 2x\, e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-2xe^{-5x}}{-3e^{-x}} = \frac{2}{3}xe^{-4x}$$

$$v'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 2x\, e^{-3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{2xe^{-2x}}{-3e^{-x}} = -\frac{2}{3}xe^{-x}$$

Integrando estas expresiones obtenemos:

$u(x) = \int \frac{2}{3}xe^{-4x}.dx = \frac{1}{24}e^{-4x}(4x + 1) + C$ (Se resuelve por partes)

$v(x) = \int -\frac{2}{3}xe^{-x}.dx = \frac{2}{3}e^{-x}(x + 1) + C$ (Se resuelve por partes)

Y la solución general resulta:

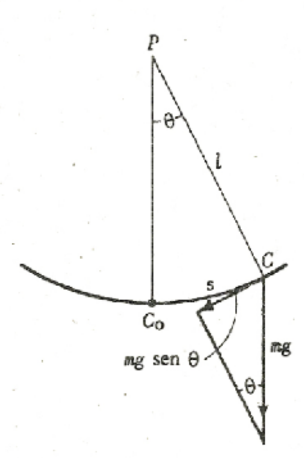
$$y_{GC} = \left(\frac{1}{24}e^{-4x}(4x + 1) + C_1\right).e^x + \left(\frac{2}{3}e^{-x}(x + 1) + C_2\right).e^{-2x}$$

Que reordenando términos resulta:

$$\boxed{y_{GC} = \frac{1}{6}e^{-3x}\left(5x + \frac{17}{4}\right) + C_1\, e^x + C_2.e^{-2x}} \text{ Solución general}$$

4. *Ejercicios de aplicación*

1. **Un péndulo simple, de longitud L y masa m, suspendido del punto P, se mueve en el plano vertical que pasa por P. Despreciando todas las fuerzas actuantes, excepto la fuerza de gravedad, hállese la ley del movimiento en función del tiempo.**



Se considera al péndulo como una masa puntual que describe un arco de circunferencia de centro P y radio L. Sea θ –considerado positivo cuando se mide en sentido contrario a las agujas del reloj– el ángulo que forma la cuerda con la vertical en un instante t cualquiera. La única fuerza actuante es la fuerza de gravedad, positiva cuando se mide hacia abajo, y su componente tangencial a la trayectoria del péndulo será: mg sen θ.
Si s es la longitud del arco C_oC, entonces: s = Lθ y la aceleración a lo largo del arco es:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Entonces, por aplicación de la Segunda Ley de Newton para la Mecánica del Punto material, se cumplirá:

$$m\,L\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

Que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal por la presencia de la función sen θ en el segundo miembro.
Cuando el péndulo realiza pequeñas oscilaciones en torno de la posición de equilibrio (es decir que los ángulos barridos son muy pequeños) puede aproximarse el sen θ ≈ θ. Esta aproximación se justifica adoptando el primer término del Desarrollo en Serie de Mac Laurin de la función sen θ. Por ello puede escribirse:

$$L\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,\theta$$

Que ordenada de otra manera queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

La Ecuación Característica, en este caso, es de la forma:

$$r^2 + \frac{g}{L} = 0$$

que tiene raíces imaginarias puras conjugadas (parte real nula):

$$r_1 = +\sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{L}}} \quad ; \quad r_2 = -\sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{L}}}$$

Entonces la Solución General será de la forma:

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t}) = \mathbf{C_1} \cos\sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{L}}}\,\mathbf{t} + \mathbf{C_2}\,\mathbf{sen}\sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{L}}}\,\mathbf{t}$$

Se trata la Ley temporal de un Movimiento Armónico Simple, cuya amplitud es: $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y cuyo período es:

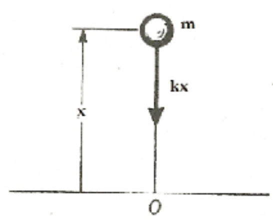
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{L}}}$$

---

2. Una masa m, libre de desplazarse a lo largo del eje x, es atraída hacia el origen O por una fuerza proporcional a la distancia x al origen. Hallar el movimiento:

a) Si la masa *m* se pone en marcha en la posición x = x_o, partiendo del reposo;

b) Si la masa *m* se pone en marcha en la posición x = x_o, con una velocidad inicial v_o. alejándose del origen O.



Sea x la distancia de la masa *m* al origen O en un instante genérico t.

Se trata de un ejemplo en que el movimiento de la masa debe ser estudiado con la Segunda Ley de Newton para la Dinámica del Punto Material; es decir:

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$ [1]

Por tratarse de un movimiento unidimensional – a lo largo del eje x, que mide la distancia recorrida positivamente hacia arriba, como se indica en la figura – la ecuación anterior adquiere una formulación escalar, ya que actúa una sola fuerza en la misma dirección que el desplazamiento: la fuerza de atracción actuante sobre la masa es similar a la que generaría un resorte de constante de restitución k.

Entonces se puede escribir:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$$

Operando algebraicamente se puede escribir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2\,x = 0$$

Expresión en la cual ω_o^2 = k/m.

Se trata de una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden Homogénea, cuya Solución General es de la forma:

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen}\omega_o\,t + C_2 \cos\omega_o\,t \quad (1)$$

[1] Se indican con tipografía en negrita las magnitudes vectoriales.

Derivando respecto del tiempo la Ley del Movimiento de la masa *m* dada por x(t) se obtiene la función velocidad de la masa:

$$v(t) = \omega_o C_1 \cos \omega_o\ t - \omega_o C_2 \operatorname{sen} \omega_o\ t \quad (2)$$

Habiendo obtenido las leyes temporales de la posición y de la velocidad, se puede determinar los dos casos propuestos en el enunciado del ejercicio.

a) Para t = 0, $x = x_o$; v = 0

Reemplazando las Condiciones Iniciales en (1) y (2) se obtendrá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: C_1 y C_2. Operando se llega a: $C_1 = 0$ y $C_2 = x_o$. Por lo tanto la Solución Particular para estas C.I. será:

$$\mathbf{x(t) = x_o \cos \omega_o\ t}$$

Se trata de un movimiento armónico simple de amplitud x_o y período $\tau = 2\pi / \omega_o$.

b) Para t = 0, $x = x_o$; $v = v_o$ (la velocidad inicial se aleja del origen O, entonces tiene el mismo sentido positivo que la distancia x recorrida).

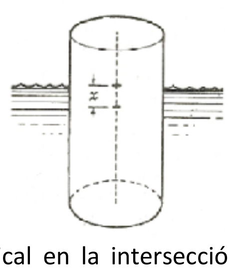
Reemplazando las Condiciones Iniciales en (1) y (2) se obtendrá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: C_1 y C_2. Operando se llega a: $C_1 = v_o/\omega_o$ y $C_2 = x_o$. Por lo tanto la Solución Particular para estas C.I. será:

$$\mathbf{x(t) = \frac{v_o}{\omega_o} \operatorname{sen} \omega_o\ t + x_o \cos \omega_o\ t}$$

Se trata de un movimiento armónico simple de amplitud $x(t) = \frac{\sqrt{v_o^2 + k^2 x_o^2}}{\omega_o}$ y período $\tau = 2\pi / \omega_o$.

---

3. Una boya cilíndrica de 2 dm de diámetro está semi-sumergida en un líquido, cuya densidad es 62,4 kg/dm^3, de modo que su eje permanece siempre vertical. Se observa que si se empuja la boya suavemente y se la deja libre, tiene un período de oscilación de 2 seg. Hallar el peso del cilindro.



Tómese el origen del desplazamiento vertical en la intersección del eje del cilindro y la superficie del líquido cuando la boya está en equilibrio. Considérese el sentido positivo del desplazamiento hacia abajo. Sea x, medido en dm, el desplazamiento de la boya en el tiempo genérico t.

Se trata de un caso en que debe aplicarse el **Principio de Arquímedes**, según el cual un cuerpo sumergido, total o parcialmente en un fluido, experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido que el cuerpo desaloja. Luego, la variación correspondiente en la fuerza de flotación será el producto de la densidad del líquido por el volumen de líquido desalojado; es decir: $62{,}4\ \pi\ r^2\ x$, siendo r el radio del cilindro, → r = 1 dm.

Variación de la fuerza de flotación = $62{,}4\ \pi\ (1)^2\ x$

$$\frac{W}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4\,\pi\,x$$

W, medido en Kg, es el peso de la boya, y se toma como valor de g = 32,2 dm/seg^2. Operando se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2009}{W}\,\pi\,x = 0$$

Resolviendo la Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden se llega a:

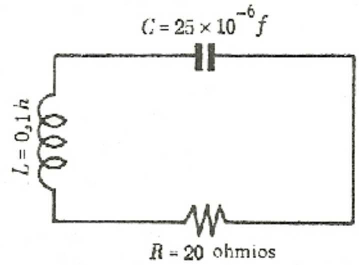
$$x(t) = C_1 \,\text{sen}\, \sqrt{\frac{2009\,\pi}{W}}\, t + C_2 \cos \sqrt{\frac{2009\,\pi}{W}}\, k\ t$$

Como el período es $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2009\,\pi}{W}}} = 2\sqrt{\frac{\pi\,W}{2009}} = 2$ seg , despejando W se obtiene el peso de la boya. El resultado es:

W = 2009 / π ≈ 640 Kg

---

4. **Un circuito eléctrico consta de una inductancia L de 0,1 henrios, una resistencia R de 20 ohmios y un condensador C cuya capacidad es de 25 microfaradios[2]. Hallar la carga eléctrica *q* y la corriente eléctrica *i* en el instante t, siendo las Condiciones Iniciales:**
   En t = 0: *q* = 0,05 Coulombios ; *i* = d*q* / dt = 0.



De acuerdo a la representación del circuito eléctrico mostrada en la figura, la fem E(t) = 0.
Por aplicación de la Ley de Kirchoff para las mallas, se tiene:

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) = 0 \quad (1)$$

Dividiendo la (1) por L y reemplazando los valores numéricos se llega a:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 200\,\frac{dq}{dt} + 400.000\,q = 0$$

Se trata de una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden Homogénea, cuya Solución General es la siguiente:

$$q(t) = e^{-100\,t}\left(A \cos 100\sqrt{39}\,t + B \,\text{sen}\, 100\sqrt{39}\,t\right)$$

Derivando una vez la expresión anterior respecto del tiempo se obtiene la ley temporal de la corriente eléctrica:

[2] 1 microfaradio = 10 $^{-6}$ faradios.

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 100\, e^{-100\,t}\left[\left(\sqrt{39}\ B - A\right)\cos 100\sqrt{39}\, t - \left(\sqrt{39}\, A + B\right) \operatorname{sen} 100\sqrt{39}\, t\right)\right]$$

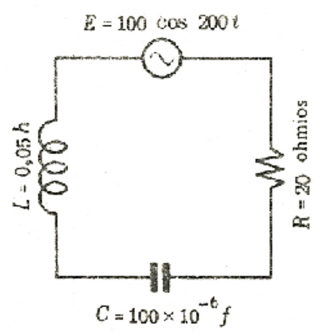
Empleando las Condiciones Iniciales: $q(0) = 0{,}05$; $i = 0$ para t = 0, se obtienen los siguientes valores de A y B:
A = 0,05 ; $B = \frac{0{,}05}{\sqrt{39}} = 0{,}008$
Por lo tanto, las expresiones finales de la carga q(t) y de la corriente i(t) quedan:

$$\boldsymbol{q(t) = e^{-100\,t}\left(0{,}05 \cos 624{,}5\, t + 0{,}08 \operatorname{sen} 624{,}6\, t\right)}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -0{,}32\, e^{-100\,t}\left[\operatorname{sen} 642{,}5\, t\right]$$

---

5. **Un circuito eléctrico consta de una inductancia L de 0,05 henrios, una resistencia R de 20 ohmios y un condensador C cuya capacidad es de 100 microfaradios. En el circuito hay además una fem variable dada por E(t) = 100 cos 200 t [voltios]. Hallar la carga eléctrica *q* y la corriente eléctrica *i* en el instante t, siendo las Condiciones Iniciales:**
   En t = 0: *q* = 0 Coulombios ; *i* = d*q* / dt = 0.



A diferencia del caso anterior, la EDO de Segundo Orden será NO HOMOGÉNEA, por la presencia de la fem.

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) = 100 \cos 200\, t$$

Dividiendo la anterior por L, y reemplazando los valores numéricos de los parámetros L, R y C del circuito se tiene:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 400\,\frac{dq}{dt} + 200.000\, q = 2000 \cos 200\, t$$

Aplicando el MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS a nuestro problema se llega a la siguiente solución:

$$\boldsymbol{q(t) = e^{-200\,t}\left(A \cos 400\, t + B \operatorname{sen} 400\, t\right) + 0{,}01 \cos 200\, t + 0{,}005 \operatorname{sen} 200\, t}$$

Derivando la anterior respecto del tiempo se obtiene la ley temporal para la intensidad de corriente i(t)

$$\boldsymbol{i(t) = e^{-200\,t}\left[(-200A + 400B)\cos 400t + (-200B - 400A) \operatorname{sen} 400t\right] + \cos 200t - 2 \operatorname{sen} 200t}$$

Aplicando las Condiciones Iniciales dadas, se obtienen los siguientes valores para A y B:
A = – 0,01 ; B = – 0,0075

Entonces:

$$q(t) = e^{-200\,t}(-0,01\cos 400t - 0,0075\,\text{sen}\,400t) + 0,01\cos 200\,t + 0,005\,\text{sen}\,200\,t$$

$$i(t) = e^{-200\,t}[-\cos 400t + 5,5\,\text{sen}\,400t] + \cos 200t - 2\,\text{sen}\,200t$$

Analizando las expresiones finales de *q*(t) y de *i*(t) se observa que, en ambas, el primer término del segundo miembro está multiplicado por una función exponencial decreciente, que tiende a 0 conforme aumenta el tiempo. Por lo tanto, si se considera un tiempo suficientemente elevado, puede considerarse a esos términos como expresión de un estado transitorio que se extingue. Por lo tanto, el llamado “régimen permanente” (aquel posterior a la extinción del “régimen transitorio”) quedará expresado mediante:

$$q(t) = 0,01\cos 200\,t + 0,005\,\text{sen}\,200\,t$$

$$i(t) = \cos 200t - 2\,\text{sen}\,200t$$

La pulsación de ambas funciones (frecuencia f = 200 / 2π ciclos por segundo) es igual que la de la fem aplicada.

5. *Ejercicios propuestos*

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden incompletas:

a) $2yy'' = 1 + (y')^2$

b) $2y'' = 2xe^x + x^2$

c) $2x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden a coeficientes constantes homogéneas:

$a)$ $y'' - 25y = 0$
$b)$ $y'' - 3y' - 10y = 0$
$c)$ $y'' - 6y' + 9y = 0$
$d)$ $y'' - 10y' + 41y = 0$
$e)$ $4y'' + 20y' + 25y = 0$
$f)$ $y'' - 2y' + 5y = 0$

3. Resolver los siguientes casos, sujetos a las condiciones iniciales que se indican:

a) $y'' - 3y' + (9/4)\,y = 0$, si: $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$

b) $y'' + y' - 2y = 0$, si: $y(0) = 3$; $y'(0) = 0$

c) $y'' + 4y' + 5y = 0$, si: $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$

4. Resolver por el Método de los Coeficientes Indeterminados las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas:

a) $y'' + 3y' = 8x + 5$

b) $y'' - 3y' + (9/4)\,y = e^{3x/2}$

c) $y'' + 16y = 2\cos(4x)$

d) $y'' - 3y = x^2 + e^{4x}$

e) $y'' + 4y' + 4y = 5x + 4 - e^{5x}$

f) $y'' - 2y' + 2y = x\sin 2x$

5. Encontrar la solución particular usando el Método de los Coeficientes Indeterminados con las condiciones iniciales indicadas:

a) $y'' - 2y' + y = x + e^{x}$; si $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$

b) $y'' + 3y' - 4y = \cos 3x$; si $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

c) $y'' + 6y' + 9y = 2 + 4x - x^2$; si $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

d) $y'' + 3y' = 5e^{-2x}$; si $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

6. Utilizar el Método de Variación de Parámetros para hallar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas:

a) $y'' + y = \sec x$

b) $y'' - 2y' + y = 2\frac{e^x}{x^3}$

6. *Bibliografía*

- Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones de modelado, de Dennis G. Zill
- Ecuaciones diferenciales, Frank Ayres.
- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Apuntes de clase de la Prof. Marta Duarte.