TP N° 11 – Campos Vectoriales Segunda parte

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018)

1. Temario

- Superficies Paramétricas
- Integrales de Superficie- Integrales de Flujo
- Teorema de Stokes- Teorema de Gauss (o de la divergencia)

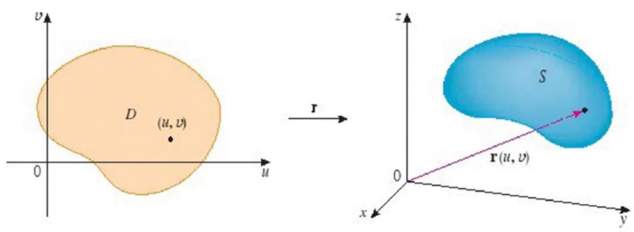
2. Resumen teórico

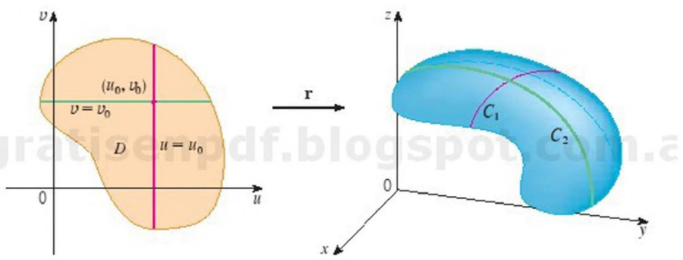
Superficies paramétricas

Una superficie S en el espacio puede ser descripta mediante la función vectorial:

$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$ **,**

para $(u,v) \in D$, en el plano uv.





Curvas reticulares: son las curvas que se obtienen haciendo:

1. $u = u_0$ obteniendo $\boldsymbol{r}(u_0, v)$, una curva C_1 que depende del parámetro v y que está sobre la superficie S
2. $v = v_0$ obteniendo $\boldsymbol{r}(u, v_0)$, una curva C_2 que depende del parámetro u y que está sobre la superficie S

Superficies con proyección regular sobre los planos coordenados

Si la superficie S está dada como la gráfica de una función dos variables, $z = f(x,y)$, se la puede considerar como una superficie paramétrica tomando a x e y como parámetros.

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}$$

Esta superficie se dice que tiene una proyección regular sobre el el plano coordenado Oxy.

Se procede análogamente para superficies dadas por $y = h(x,z)$ ó $x = k(y,z)$, que tienen una proyección regular sobre los planos coordenados Oxz y Oyz, respectivamente.

Superficie orientada

Es una superficie que tiene dos lados bien definidos, de modo tal que recorrerla, siempre se finaliza el recorrido en el mismo lado de partida. Una superficie no orientada es la cinta de Möbius.
Cuando la superficie es cerrada, se considera positiva la orientación hacia el exterior de la misma.

Integrales de superficie

Sea S una superficie y sea $g(x,y,z)$ una función escalar continua en una región que contiene a S. La integral de superficie de $g(x,y,z)$ sobre S se define como:

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k g(u_k, v_k, w)\Delta S_k$$

Teoremas de evaluación

Si S es una superficie paramétrica dada por $\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$ **,** para $(u,v) \in D$, en el plano uv, con $\boldsymbol{r_u}(u,v)$ y $\boldsymbol{r_v}(u,v)$ continuas y no paralelas en D, entonces:

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g\big(\boldsymbol{r}(u,v)\big)\, |\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)|\, dA$$

Obs: el producto vectorial $\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)$ da por resultado es un vector normal a S en el punto $\boldsymbol{r}(u,v)$.

Si S es la gráfica de $z = f(x,y)$ y tiene una proyección regular sobre el plano Oxy en la región Rxy donde f tiene derivadas parciales continuas, entonces:

$|\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)| = \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}$,

por lo que resulta:

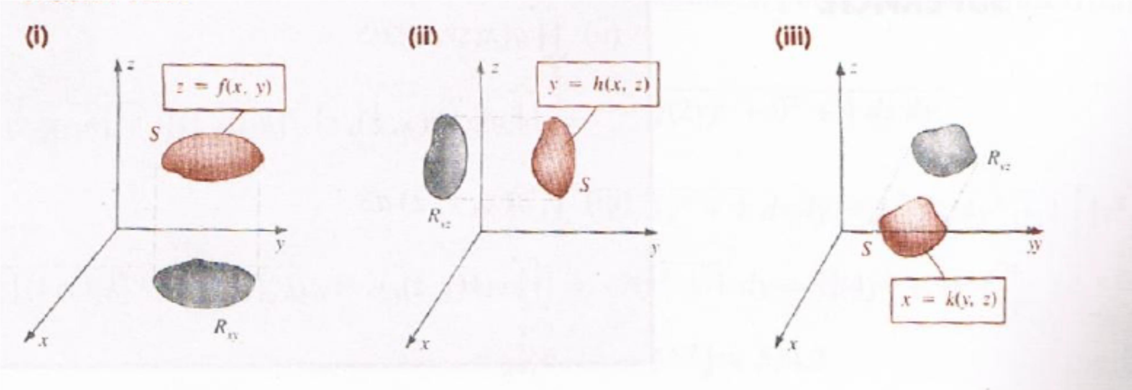
$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_{R_{xy}} g(x,y,f(x,y))\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\, dA$$

Analogamente, si S es la gráfica de $y = h(x,z)$ y tiene una proyección regular sobre el plano Oxz en la región Rxz donde h tiene derivadas parciales continuas, entonces:

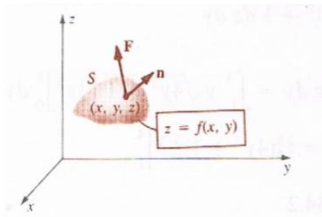
$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_{R_{xz}} g(x,h(x,z),z)\sqrt{[h_x(x,z)]^2 + [h_z(x,z)]^2 + 1}\, dA$$

Y si S es la gráfica de $x = k(y,z)$ y tiene una proyección regular sobre el plano Oyz en la región Ryz donde k tiene derivadas parciales continuas, entonces:

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_{R_{xz}} g(k(y,z),y,z)\sqrt{\left[k_y(y,z)\right]^2 + [k_z(y,z)]^2 + 1}\, dA$$



Integral de flujo



Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una superficie S orientada con un vector unitario normal **n** (cuyas componentes son funciones continuas de (x, y, z)). La integral de superficie de $\boldsymbol{F}$ sobre S (ó integral de flujo de $\boldsymbol{F}$ sobre S) se define:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS$$

Si S es una superficie paramétrica dada por $\boldsymbol{r}(u, v)$ entonces $\boldsymbol{n}$ **,** vector normal unitario a la superficie S, resulta

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)}{|\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)|}$$

y la integral de flujo se evalúa mediante:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \frac{\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)}{|\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)|}\right] |\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v)|\, dA$$

$$= \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))(\boldsymbol{r_u}(u,v) \wedge \boldsymbol{r_v}(u,v))\, dA$$

Si S es la gráfica de $z = f(x, y)$, tiene una proyección regular sobre el plano xz, y se define $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ y el vector **n** resulta:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla \mathbf{g}(x,y,z)}{|\nabla \mathbf{g}(x,y,z)|} = \frac{-f_x(x,y)\, \boldsymbol{i} - f_y(x,y)\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}}$$

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} \boldsymbol{F}(x, y, f(x,y))(-f_x(x,y)\, \boldsymbol{i} - f_y(x,y)\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\, dA$$

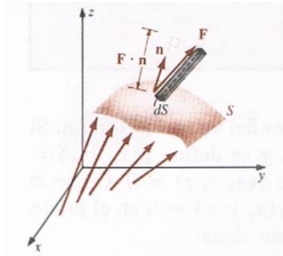
Siendo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(z, y, z)\boldsymbol{k}$ resulta

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} \left(- M(x, y, f(x,y))f_x(x,y) + N(x, y, f(x,y))f_y(x,y) + P(x, y, f(x,y))\boldsymbol{k}\right) dA$$

Expresiones análogas se obtienen para los casos en que la superficie esté dada por $y = h(x, z)$ ó $x = k(y, z)$, en que tendrá una proyección regular sobre los planos coordenados Oxz y Oyz, respectivamente.

Interpretación de la integral de flujo

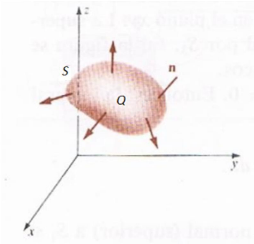
Si $\boldsymbol{F}$ fuera un campo de velocidades de un fluído, y S una membrana delgada a través de la cual se filtra el fluído, la integral de flujo da el volumen de fluído que atraviesa a S por unidad de tiempo, es decir el **flujo de F a través de S.**



Si se trata de una superficie cerrada S, el flujo mide el desplazamiento neto hacia afuera por unidad de tiempo. Si el resultado es positivo se dice que hay una **fuente** de **F**, y si es negativo se dice que hay un **sumidero**.

Teorema de la divergencia o de Gauss

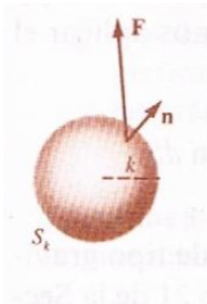
Sea Q una región en el espacio acotada por una superficie cerrada S, y sea $\boldsymbol{n}$ un vector unitario normal exterior a S en (x, y, z). Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial que tiene derivadas parciales continuas en Q, entonces, el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S es igual a la integral triple de la divergencia de $\boldsymbol{F}$ sobre Q.



$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS = \iiint_Q \nabla.\boldsymbol{F}\, dV$$

Interpretación de la divergencia

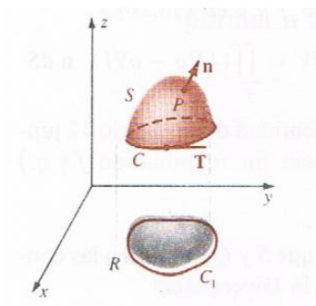
Sea P un punto arbitrario y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo en una región que contiene a P en su interior. Sea S_k la frontera de una esfera de radio k con centro en P.
La divergencia de $\boldsymbol{F}$ en P es el límite del flujo por unidad de volumen a través de la esfera, cuando el radio tiende a 0.



$$[\nabla.\boldsymbol{F}]_k = \lim_{k\to 0} \iint_{S_k} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS$$

Teorema de Stokes

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región que contiene a S, entonces la integral de línea de la componente tangencial de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de C recorrida una vez en la orientación positiva es igual a la integral de superficie sobre S de la componente normal de $rot\, \boldsymbol{F}$.

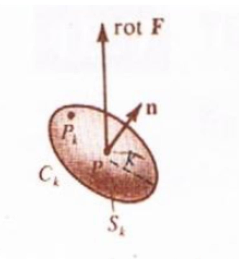


$$\oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\, ds = \iint_S (rot\, \boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}\, dS$$

Interpretación del rotor

Sea P un punto cualquier, sea S_k el disco circular de radio k con centro en P y sea C_k la frontera de S_k.

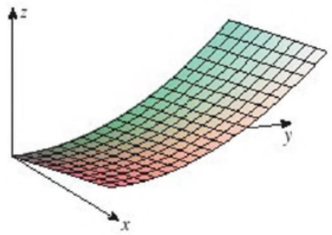
$$[(rot\, \boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}]_P = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\Pi k^2} \oint_{C_k} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\, ds$$



Si $\boldsymbol{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, entonces $[(rot\ \boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}]_P$ es la circulación del fluido, por unidad de longitud, alrededor del borde de un disco circular perpendicular a $\boldsymbol{n}$. Alcanzará su máximo valor cuando $\boldsymbol{n}$ sea paralelo a $rot\ \boldsymbol{F}$.

3. Ejercicios resueltos

1) Evalúe $\iint_S g(x,y,z)\,dS$, siendo:
$g(x,y,z) = y$, y $S\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x,y) = x + y^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$
.



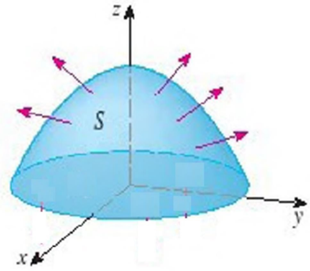
Utilizaremos la expresión

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_{R_{xy}} g(x,y,f(x,y))\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\,dA$$

En este caso $f_x(x,y) = 1$, $f_y(x,y) = 2y$

$$\iint_S y\,dS = \iint_{R_{xy}} y\sqrt{1 + [2y]^2 + 1}\,dA = \iint_{R_{xy}} y\sqrt{2 + 4y^2}dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{2 + 4y^2}dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{12}(2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{12}(18)^{\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{(18)^{\frac{3}{2}}}{12}\,x\right]_0^1 = \frac{(18)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

2) Evalúe $\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS$, donde:



$\boldsymbol{F}(x,y,z) = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
y S es la porción del paraboloide $z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$que se halla sobre el plano Oxy

Por tratarse de una superficie con una proyección regular sobre el plano Oxy , utilizaremos la expresión:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{R_{xy}} \big(-M(x,y,f(x,y))f_x(x,y) + N(x,y,f(x,y))f_y(x,y) + P(x,y,f(x,y))\boldsymbol{k}\big)\,dA$$

Donde:
R_{xy} es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.
$M(x,y,z) = y$, $N(x,y,z) = x$, $(x,y,z) = z$,
$f_x(x,y) = -2x$, $f_y(x,y) = -2y$

Resulta:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{R_{xy}} (-y(-2x) - x(-2y) + (1 - x^2 - y^2))\,dA = \iint_{R_{xy}} (1 + 4xy - x^2 - y^2)\,dA$$

Resolviendo la integral doble en coordenadas polares, resulta:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS = 2\pi$$

3) Determine el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, sobre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Utilizaremos el teorema de Gauss, $\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_Q \nabla.\boldsymbol{F}\,dV$, para lo cual calculamos la divergencia de $\boldsymbol{F}$

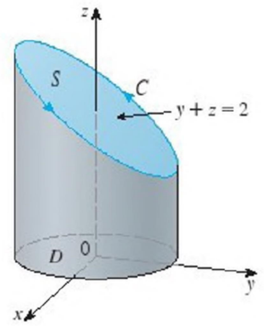
$$\nabla.\boldsymbol{F} = 1$$

Entonces:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_Q \nabla.\boldsymbol{F}\,dV = \iiint_Q dV = V(Q) = \frac{4}{3}\pi\,1^3 = \frac{4}{3}\pi$$

Obs: $V(Q)$ es el volumen del recinto Q , en este caso una esfera de radio unitario.

4) Evalúe $\oint_C \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -y^2\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$, y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$



Utilizaremos el teorema de Stokes ,

$$\oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\,ds = \iint_S (rot\,\boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}\,dS$$

para lo cual calculamos el rotor de $\boldsymbol{F}$:

$$rot\,\boldsymbol{F} = (1 + 2y)\boldsymbol{k}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\,ds = \iint_S (rot\,\boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}\,dS = \iint_S (rot\,\boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}\,dS$$

Para calcular el flujo del rotor sobre S, tomaremos como S la elipse contenida en el plano $y + z = 2$ cuya proyección en el plano Oxy es $x^2 + y^2 \leq 1$. Por lo tanto S estará dada por $z = f(x,y) = 2 - y$.

Recordando que el flujo de un campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(z,y,z)\boldsymbol{k}$ cuando la superficie está dada por $z = f(x,y)$ se puede calcular mediante:

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{R_{xy}} \big(-M(x,y,f(x,y))f_x(x,y) + N(x,y,f(x,y))f_y(x,y) + P(x,y,f(x,y))\boldsymbol{k}\big)\,dA$$

resulta en este caso que:

a) el campo vectorial está dado por $rot\,\boldsymbol{F} = (1 + 2y)\boldsymbol{k}$, con lo cual $M(x,y,z) = 0$, $N(x,y,z) = 0$, $P(z,y,z) = 1 + 2y$.
b) Y como $z = f(x,y) = 2 - y$, tendremos $f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = -1$

$$\iint_S (rot\,\boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{R_{xy}} (1 + 2y)\,dA$$

Como R_{xy} es la región dada por $x^2 + y^2 \leq 1$ resolvemos la integral doble en coordenadas polares, obteniendo:

$$\oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\ ds = \iint_S (rot\ \boldsymbol{F}).\boldsymbol{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} (1+2y)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2\, r \sin\theta)\, r\, dr d\theta = \pi$$

4. Ejercicios de aplicación

1) La temperatura μ de una bola de metal es proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la misma. Determine el flujo de calor a través de una esfera S de radio a con centro en el centro de la bola.

   Tomando el centro de la bola como el origen, tenemos $\mu(x,y,z) = C(x^2+y^2+z^2)$, donde C es una constante de proporcionalidad. Luego, el flujo de calor es:
   $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\boldsymbol{K}\, \nabla\mu$= - $\boldsymbol{K}C(2x+2y+2z)$, donde $\boldsymbol{K}$ es la conductividad del metal.

   Cómo el vector normal unitario hacia afuera de la esfera de radio a en el punto (x,y,z) es

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{a}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

   Resulta:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)\,.\,\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{2KC}}{a}(x^2+y^2+z^2),$$

   Como sobre S tenemos $x^2+y^2+z^2 = a^2$, resulta

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)\,.\,\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{2aKC}$$

   Entonces

$$\iint_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\, dS = -\boldsymbol{2aK}C\iint_S dS = -\boldsymbol{2}a\boldsymbol{K}C.A(S) == -\boldsymbol{2}a\boldsymbol{K}C.(4\pi a^2) = -8\boldsymbol{K}C\pi a^3$$

   Obs: $\iint_S dS$ = $A(S) = 4\pi a^2$, área de la esfera de radio a.

5. Ejercicios propuestos

1) Parametrizar las siguientes superficies:

   a) Cilindro $x^2 + y^2 = 25$ acotado por los planos z = 0 y z + y = 6
   b) Paraboloide $z = x^2 + y^2$ limitado por z = 9
   c) Cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitado por z = 16
   d) Parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en el interior del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con Z≥0

2) Identificar y graficar las superficies:
   a) r (u, v) = cosu i + senu j + vk , $0 \leq v \leq 4 - \cos u - \operatorname{sen} u$, $0 \leq u \leq 2\pi$
   b) r (u, v) = 2 senv cosu i + 2 senv senu j + 2 cosv k , $0 \leq v \leq \pi$, $0 \leq u \leq 2\pi$
   c) r (u, v) = v cosu i + v sen u j + v^2 k , $\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6}$, $0 \leq u \leq 2\pi$

3) Calcular el área de las siguientes superficies:

a) Superficie del ejercicio anterior, inciso b)

b) Superficie del ejercicio del punto anterior, inciso c)

c) r (u, v) = 2 cosu i + 2 senu j + v k , $0 \leq v \leq 4 - 2$ senu , $0 \leq u \leq 2\pi$

4) Calcular la integral de superficie $\iint_s f(x,y,z)$ ds:

a) f(x,y,z) = z^2 sobre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$

b) f(x,y,z) = z sobre el cilindro $y = z^2$, $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq z \leq 4$

c) f(x,y,z) = x + y + z sobre $1 = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 2$

5) Calcular la integral de flujo $\iint_s \vec{F}(x,y,z)\,\vec{n}$ dS:

a) $\vec{F}$ (x,y,z) = (y, -x, 1) , sobre z = $x^2 + y^2$ con $z \leq 4$ ($\vec{n}$ hacia abajo)

b) $\vec{F}$ (x,y,z) = (y, -x, z) , sobre $z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 3$ ($\vec{n}$ hacia abajo)

c) $\vec{F}$ (x,y,z) = (xy, y^2, z) sobre la superficie cerrada formada por las caras del cubo: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ ($\vec{n}$ hacia el exterior)

6) Aplicar el teorema de la divergencia (Gauss) para calcular el flujo de $\vec{F}$ hacia el exterior a través de la frontera de V:

a) $\vec{F}$ (x,y,z) = (y – x)$\check{i}$ + (z – y) $\check{j}$ + (y – x) $\check{k}$ donde V es el cubo limitado por: $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$

b) $\vec{F}$ (x,y,z) = $x^2\ \check{i} + y^2\ \check{j} + z^2\ \check{k}$ donde V es el cubo limitado por: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$

c) $\vec{F}$ (x,y,z) = $x^2\ \check{i} + y^2\ \check{j} + z^2\ \check{k}$ donde V es el sólido limitado por: $x^2 + y^2 \leq 4$, z = 0 y z = 1

7) Aplicar el teorema de Stokes para calcular la integral de línea $\oint_c \vec{F}$ dr

a) $\vec{F}$ (x,y,z) = ($x^2 e^x$ - y) $\check{i} + \sqrt{y^2+1}\ \check{j} + z^3\ \check{k}$ ($\vec{n}$ hacia arriba en el plano)

donde C es la curva formada por z = $4 - x^2 - y^2$ y Z = 0

b) $\vec{F}$ (x,y,z) = $x^2\ \check{i} + (y^4 - x)\ \check{j} + z^2 \text{seny}\ \check{k}$ ($\vec{n}$ hacia arriba en el plano) y C: Z = $x^2 + y^2$, z = 4

8) Aplicar el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_s \text{rot}\vec{F}\vec{n}$ dS

a) $\vec{F}$ (x,y,z) = (zx, $2y^2, z^3$) , S es la porción de Z = $4 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy ($\vec{n}$ hacia arriba)

b) $\vec{F}$ (x,y,z) = (zx^2 , z e^{xy^2} - x, x ln y^2) , S es la porción de Z = $1 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy ($\vec{n}$ hacia arriba).

6. Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Matemática Superior para Ingenieros y Físicos, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff