# *TP N° 10 – Integración Múltiple*

***Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018)***

## 1. *Temario*

- Definición de integral doble
- Región rectangular, de tipo I y de tipo II
- Determinación de integrales dobles
- Cálculo integrales dobles en coordenadas cartesianas
- Cálculo integrales dobles en coordenadas polares
- Cálculo de áreas y volúmenes con integrales dobles
- Áreas de superficies alabeadas

- Integrales tripes. Cálculo de volúmenes
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas
- Masa, centro de masa y momentos de inercia de una lámina y de un sólido

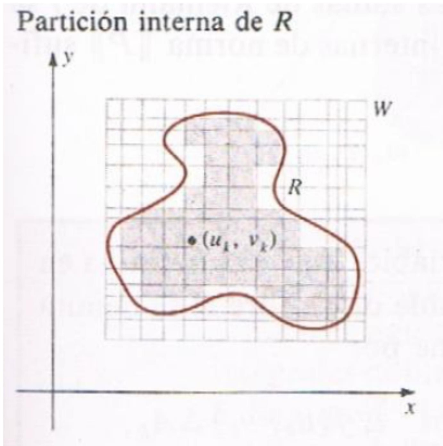
## 2. *Resumen teórico*

### *Integral doble*

Sea z = f(x, y) una función de dos variables independientes definida en una región cerrada R. La integral doble de f(x, y) sobre R se define por:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k$$

siempre y cuando el límite exista.




### *Aditividad de la región de integración*

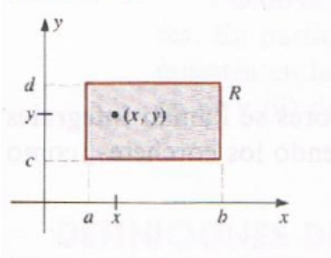
Si R es la unión de dos regiones $R_1$ y $R_2$ que no se sobreponen o solapan, entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

# Teoremas de evaluación

**Región rectangular:**

Sea $R = \{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 /\ a \leq x \leq b\ ;\ c \leq y\ \leq d\}$




Si f(x, y) es continua en R, entonces:

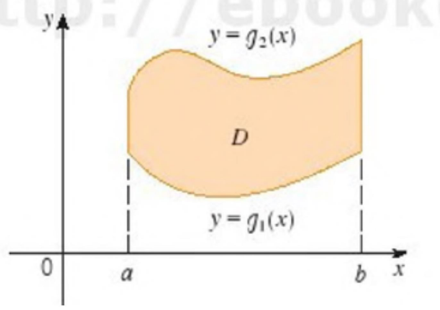
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

**Región Tipo I:**

Sea $R = \{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2\ /\ a \leq x \leq b\ ;\ g_1(x) \leq y\ \leq g_2(x)\}$,

con $g_1$ (x) y $g_2$ (x) funciones continuas, tales que $g_1(x) \leq g_2(x) \forall x\ \in [a,b]$

Si f(x, y) es continua en R, entonces:



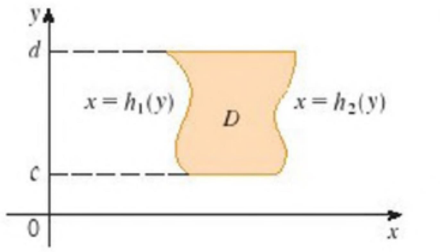

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

**Región tipo II:**

Sea $R = \{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2\ /\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\ ;\ c \leq y\ \leq d\}$,

con $h_1$ (y) y $h_2$ (y) funciones continuas, tales que $h_1(y) \leq h_2(y)\ \forall\ y\ \in [c,d]$.

Si f(x, y) es continua en R, entonces:




$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

# Área y volumen

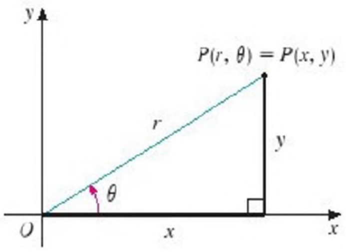
Si $z = f(x,y) \geq 0\ \forall (x,y) \in R$, entonces el volumen $V$ del sólido comprendido bajo la gráfica de $f$(x, y) y sobre la región $R$ es:

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

Por otra parte, si se integra la función constante $f(x,y) = 1$ sobre una región R se obtiene el área de R:

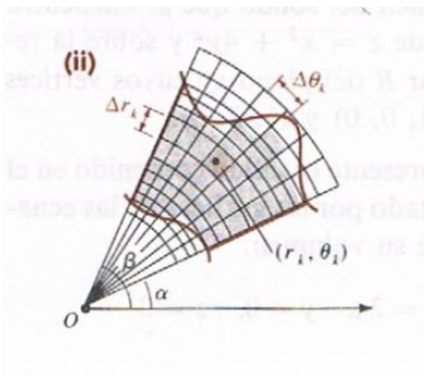
$$A_R = \iint_R dA$$

## *Integrales dobles en coordenadas polares*




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ arc\ tg\ \left({}^{x}/_{y}\right) = \theta \end{cases}$$



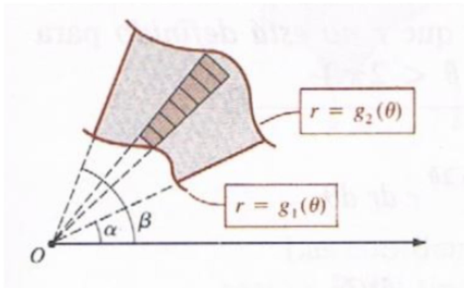

Sea $z = f(r,\theta)$ definida en una región $R$. Si el área elemental de un elemento de la partición interior es: $\Delta A_K = \overline{r_k}\ \Delta r_k\ \Delta\theta_k$, la integral doble en coordenadas polares se define como:

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(r_{k,}\theta_k)\ \overline{r_k}\ \Delta r_k\ \Delta\theta_k$$

si el limite existe.

Se puede demostrar que si $R$ está definida por:

$$R = \{(r,\theta)/\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\ ;\ \alpha \le \theta \le \beta\ \}$$

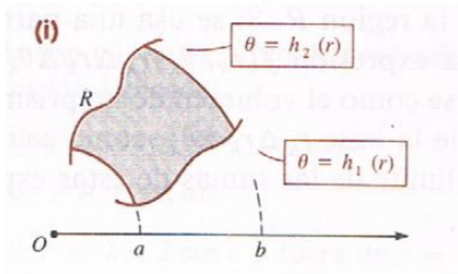



con $f(r,\theta), g_1(\theta)\ y\ g_2\ (\theta)$ funciones continuas, tales que $g_1(\theta)\ \le\ g_2\ (\theta)\ \forall\ \theta\ \in\ [\alpha,\beta]$

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)r\ drd\theta$$

y si $R$ está definida por:

$$R = \{(r,\theta)/\ a \le r \le b\ \ ;\ \ h_1(r) \le \theta \le h_2(r)\}$$




con $f(r,\theta), h_1(r)\ y\ g_2\ (r)$ funciones continuas, tales que $h_1(r)\ \le\ h_2\ (r)\ \forall\ r\ \in\ [a,b]$

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)r\ d\theta\ dr$$

**<u>NOTA IMPORTANTE</u>:**

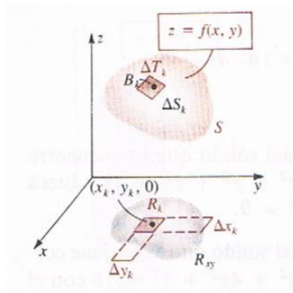
Si bien la relación $r^2 = x^2 + y^2$, matemáticamente, brinda la posibilidad del doble signo para la variable radial: $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ , al utilizar las coordenadas polares en la resolución de integrales dobles se debe garantizar la unicidad de las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares. Por lo tanto la variable radial deberá ser sólo positiva $=> r > 0$. De lo contrario al determinar el $dA = r.dr.d\theta$ podría admitirse un área elemental negativa, lo que es incorrecto.

**Relaciones trigonométricas necesarias:**

Para facilitar la resolución de los ejercicios propuestos recordamos las siguientes relaciones trigonométricas:

$$cos^2\,\theta = \frac{1}{2}\,[1+\cos 2\theta] \quad ; \quad sen^2\,\theta = \frac{1}{2}\,[1-\cos 2\theta]$$

## *Área de una superficie alabeada*




Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables independientes con derivadas parciales continuas en una región $R$. Sea $S$ la parte de la gráfica de $f(\mathrm{x,y})$ cuya proyección en el plano $(xy)$ es $R$. El área de $S$ puede calcularse por:

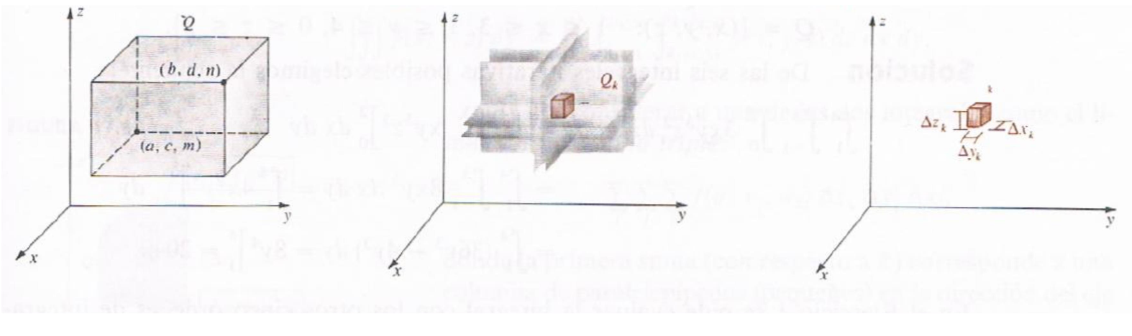
$$A_S = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \Delta T_k = \iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\; dA$$

## *Integrales Triples*

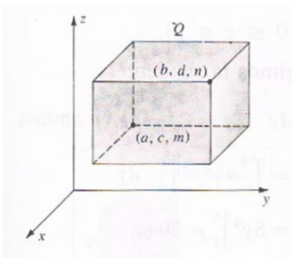
Sea $w = f(x,y,z)$ definida en una región $Q$ en el espacio. La integral triple de $f(x,y,z)$ sobre $Q$ se define por:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w)\,\Delta V_k$$

siempre y cuando el límite exista.




## *Teoremas de evaluación*




**Región paralelepípeda:**

Sea $Q = \{(x,y,z) \epsilon\, \mathbb{R}^3 /\, a \le x \le b\, ;\, c \le y \le d\, ;\, m \le z \le n\}$

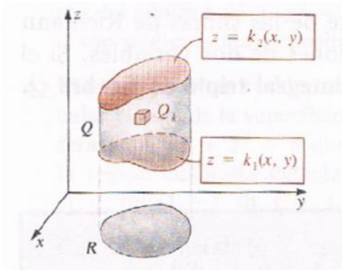
Si $f(x,y,z)$ es continua en $Q$, entonces:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdy\,\mathrm{dz}$$

Hay otros cinco órdenes de integración posibles para esta integral. El alumno podrá proponer los diferentes órdenes de integración posibles.

**Región sólida Tipo I:**

Sea $Q = \{(x,y,z)\epsilon\ \mathbb{R}^3\ /\ (x,y)\epsilon\ R\ ;\ k_1(x,y) \le z \le k_2(x,y)\}$,




con $k_1(x,y)$ y $k_2(x,y)$ con derivadas parciales continuas tales que $k_1(x,y) \le\ k_2(x,y)\ \forall\ (x,y) \in R$.

Si $f(x,y,z)$ es continua en $Q$, entonces:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{dz}\right] dA$$

La integral doble se resolverá según las características de $R$ en el plano $(xy)$. En el caso de que $R$ sea una región de Tipo I en el plano $(xy)$, dada por:

$R = \{(x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2\ /\ a \le x \le b\ ;\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ continuas.

La integral iterada resulta:

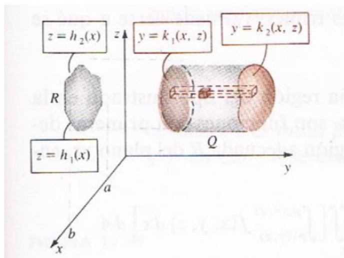
$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{dz}dydx$$

**Región sólida Tipo II:**

Sea $Q = \{(x,y,z)\epsilon\ \mathbb{R}^3\ /\ (x,z)\epsilon\ R\ ;\ \ k_1(x,z) \le y \le k_2(x,z)\ \}$,

con $k_1(x,z)$ y $k_2(x,z)$ con derivadas parciales continuas, tales que

$k_1(x,z) \le k_2(x,z)\ \forall\ (x,z) \in R$



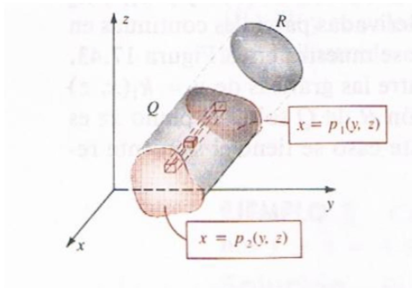

Si $f(x,y,z)$ es continua en $Q$, entonces:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{dy}\right] dA$$

La integral doble se resolverá según sean las características de $R$ en el plano $(xz)$.

**Región sólida tipo III:**

Sea $Q = \left\{(x, y, z) \epsilon\, \mathbb{R}^3\ -\ (y, z) \epsilon\, R\ ;\ \ k_1(y, z) \leq z \leq k_2(y, z)\right\}$,
con $k_1(y, z)$ y $k_2(y, z)$ con derivadas parciales continuas, tales que
$k_1(y, z) \leq k_2(y, z)\ \forall\ (y, z) \in R$

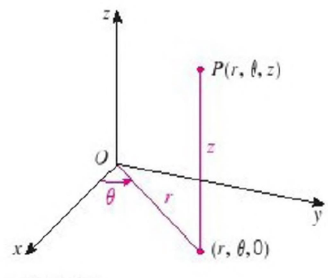



Si $f(x, y, z)$ es continua en $Q$, entonces:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x, y, z)\, \mathrm{dz}\right] dA$$

La integral doble se resolverá según sean las características de $R$ en el plano $(yz)$.

## *Integrales Triples en coordenadas cilíndricas*




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ x = r\ \sin\theta \\ \quad z \equiv z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ arctg\left({}^{y}\!/_{x}\right) = \theta \\ \quad z \equiv z \end{cases}$$

Las coordenadas cilíndricas son útiles en problemas que involucran simetría respecto a un eje; en general el eje $z$ se elige de manera que coincida con el eje de simetría.
Por ejemplo, el eje del cilindro circular con coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = c^2$ es el eje $z$.
En coordenadas cilíndricas este cilindro tiene una ecuación muy simple: $r = c$.

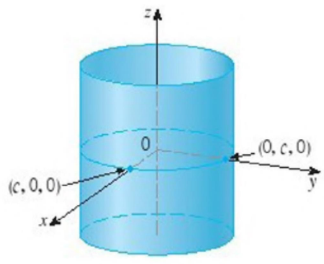



**FIGURA 4**
$r = c$, un cilindro

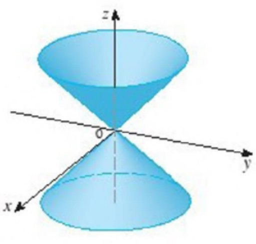



**FIGURA 5**
$z = r$, un cono

Del mismo modo, la ecuación del cono circular $z^2 = x^2 + y^2$, de eje de $z$, resulta $z^2 = r^2$, o sea $z = r$ (para la porción superior) y $z = -r$ (para la porción inferior).

Sea $w = f(r, \theta, z)$ definida en una región $Q$. La integral triple de $f(r, \theta, z)$ sobre $Q$ se define por:

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k)\, \Delta V_k$$

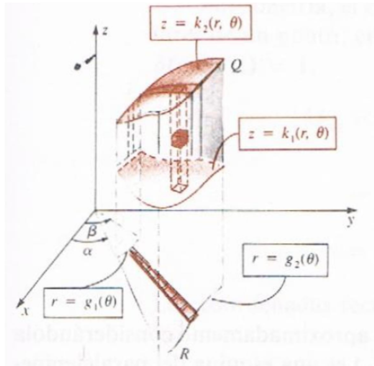
donde:

$$\Delta V_k = \bar{r}_k \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k$$

## *Teorema de evaluación*

Sea $w = f(r,\theta,z)$ continua en $Q = \{(r,\theta,z) \;/\; a \le r \le b \;;\; \alpha \le \theta \le \beta \;;\; m \le z \le n\}$

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dV = \int_m^n \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r,\theta,z) r dr d\theta dz$$




También se puede definir sobre regiones más complicadas.

Supongamos sea $w = f(r,\theta,z)$ continua en:

$Q = \{(r,\theta,z)/\; (r,\theta) \in R \;;\; k_1(r,\theta) \le z \le k_2(r,\theta)\}$,

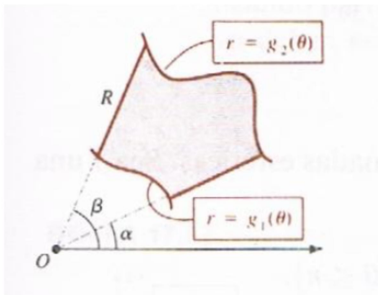
donde $k_1(r,\theta)$ y $k_2(r,\theta)$ tienen derivadas parciales continuas, tales que

$k_1(r,\theta) \le k_2(r,\theta) \;\forall\; (r,\theta) \in R$

Supongamos, además que $R$ está dada por:

$$R = \{(r,\theta)/\; \alpha \le \theta \le \beta \;;\; g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$

con $g_1(\theta)$ y $g_2(\theta)$ continuas, entonces:



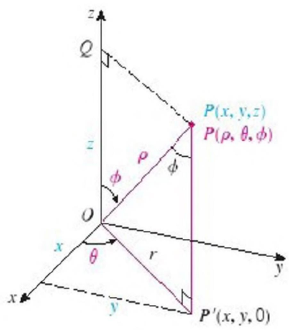

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) r dz dr d\theta$$

Existen otros cinco casos con distintos órdenes de iteración, que no revisten utilidad práctica en este curso.

## *Integrales triples en coordenadas esféricas*

$$\begin{cases} x = \rho\, \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho\, \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\, \cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ arctg\left({}^{y}\!/_{x}\right) = \theta \\ arctg\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \phi \end{cases}$$




El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas donde hay simetría respecto a un punto, y el origen de coordenadas se coloca en este punto.

Por ejemplo, una esfera con centro en el origen y radio $c$ tiene una ecuación muy sencilla en coordenadas esféricas, dada por $\rho = c$.

La gráfica de la ecuación $\theta = \text{ c}$ es un plano vertical pasante por el eje z; y la ecuación $\phi = c$ representa un semicono coaxial con el eje $z$.

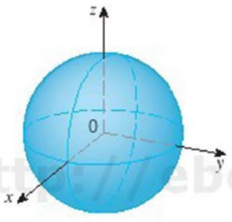


FIGURA 2 $\rho = c$, una esfera

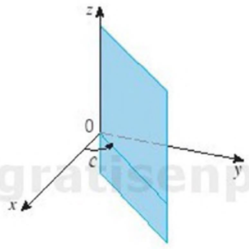


FIGURA 3 $\theta = c$, un semiplano

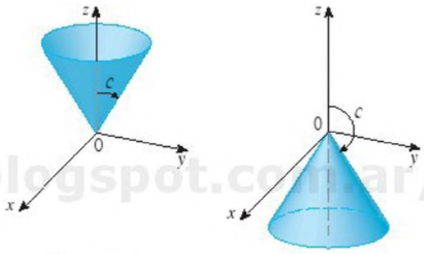
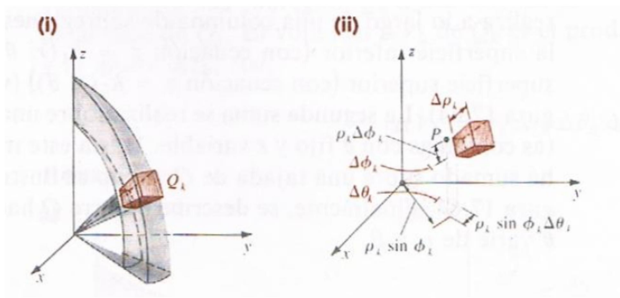



FIGURA 4 $\phi = c$, un semicono



Sea $w = f(\rho, \theta, \phi)$ una función de tres variables independientes continua en

$Q = \{(\rho, \theta, \phi) \,/\, a \leq \rho \leq b \,;\; \alpha \leq \theta \leq \beta \;;\, \gamma \leq \theta \leq \delta\}$




En este caso el volumen del elemento de partición $Q_k$ resulta:

$$\Delta V_k \cong {\rho_k}^2 \sin \phi_k \, \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$$

Y la integral triple en coordenadas esféricas se calcula mediante:

$$\iiint_Q f(\rho, \theta, \phi) dV = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_a^b f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta$$

Hay otros cinco órdenes de integración posibles para esta integral. El alumno podrá establecer esos otros órdenes de integración.

## *Aplicaciones técnicas de integrales múltiples*

### 1. Masa de una placa plana (o lámina)

Se determina mediante la siguiente integral doble:

$$m = \iint_R \delta(x, y) \, dA$$

en la que $\delta(x, y)$ es la densidad superficial de masa y se mide en gramos/cm$^2$.

### 2. Masa de un sólido

Se determina mediante la siguiente integral triple:

$$m = \iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV$$

en la que $\delta(x,y,z)$ es la densidad volumétrica de masa y se mide en gramos/cm$^3$.

**3. Centro de masa de una placa plana.**

Se trata de un punto particular, que puede pertenecer o no a la placa según sea la forma de ella, cuyas coordenadas se simbolizan mediante: $C_M : (\bar{x}, \bar{y})$ que se determinan usando las siguientes relaciones:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, \delta(x,y)\, dA}{\iint_R \delta(x,y)\, dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\, \delta(x,y)\, dA}{\iint_R \delta(x,y)\, dA}$$

**4. Centro de masa de un sólido.**

De manera similar al caso anterior se trata de un punto cuyas coordenadas son: $C_M : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas se calculan mediante:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_Q x\, \delta(x,y,z)\, dV}{\iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_Q y\, \delta(x,y,z)\, dV}{\iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_Q z\, \delta(x,y,z)\, dV}{\iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV}$$

**5. Momento de inercia de una placa plana.**

Son una medida de la distribución de la masa de una placa respecto de los ejes coordenados. Se calculan mediante:

$$I_x = \iint_R y^2\, \delta(x,y)\, dA$$

$$I_y = \iint_R x^2\, \delta(x,y)\, dA$$

$$I_z = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\, \delta(x,y)\, dA$$

**6. Momento de inercia de un sólido.**

Son una medida de la distribución de la masa de un sólido respecto de los ejes coordenados. Se calculan mediante:

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\, \delta(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\, \delta(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, \delta(x, y, z)\, dV$$

# 3. *Ejercicios resueltos*

**1) Dada** $z = f(x, y) = x^2 y$ **, calcule la** $\iint_R f(x, y) dA$ **, siendo** $R$ **la región:**

$R = \{(x, y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 3\, ;\ 1 \leq y \leq 2\}$.
La región R es una región rectangular. Como $f(x, y)$ es continua en $R$, entonces es válido el teorema de evaluación mediante integrales iteradas:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy dx = \int_0^3 \left( \int_1^2 x^2 y\, dy \right) dx = \int_0^3 \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_1^2 \mathrm{dx}$$

$$= \int_0^3 \left[ \frac{x^2 2^2}{2} - \frac{x^2 1^2}{2} \right] \mathrm{dx} = \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \ \mathrm{dx} = \left[ \frac{x^3}{2} \right]_0^3$$

$$\boxed{\iint_R f(x, y) dA = \frac{27}{2}}$$

**2) Dada** $z = f(x, y) = y \sin xy$ **, calcule la** $\iint_R f(x, y) dA$ **, siendo** $R$ **la región:**

$R = \{(x, y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 2\, ;\ 0 \leq y \leq \pi\}$. También se trata de una región rectangular.

Como $f(x, y)$ es continua en $R$, entonces es válido el teorema de evaluación mediante integrales iteradas. En este caso, por la forma de la función a integrar, resulta conveniente integrar primero respecto de $x$. Por eso planteamos:

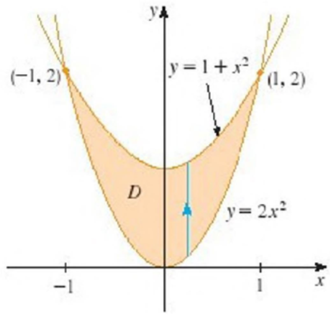
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^\pi \int_1^2 y \sin xy\, dx\ dy = \int_0^\pi [-\cos xy]_1^2\ dy$$

$$\int_0^\pi (-\cos 2y + \ \cos y)\ dy = \left[ -\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \right]_0^\pi$$

$$\boxed{\iint_R f(x, y) dA = 0}$$

**3) Evalúe $\iint_R (x+2y)dA$ donde $R$ es la región acotada por las parábolas $y=2x^2$ ; $y=1+x^2$**

Las parábolas se cortan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir $x = \pm 1$




Del gráfico se ve que $R$ es una región de tipo I, cuya descripción es:
$R = \{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \le x \le 1\,;\ 2x^2 \le y \le 1+x^2\}$,

Como $f(x,y)$, $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones continuas, entonces se aplica el teorema de evaluación y resulta:

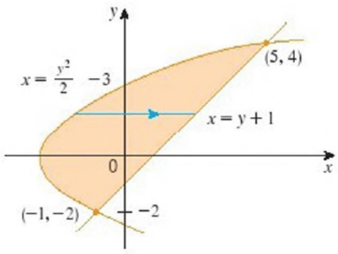
$$\iint_R (x+2y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dydx$$

$$= \int_{-1}^{1} [xy+y^2]_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)dx = \left[-\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{\iint_R (x+2y)dA = \frac{32}{5}}$$

**4) Evalúe $\iint_R xy\,dA$ donde $R$ es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$**

Si graficamos a $R$, se ve que es conveniente expresarla como región Tipo II




$R = \left\{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 / -2 \le y \le 4\,;\ \frac{y^2}{2} - 3 \le x \le y+1\right\}$,

Como $f(x,y), h_1(y)$ y $h_2\,(y)$ son funciones continuas, entonces se aplica el teorema de evaluación y resulta:

$$\iint_R xydA = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy\,dxdy = \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2y}{2}\right]_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dx = \int_{-2}^{4}\frac{y}{2}\left[(y+1)^2 - \left(\frac{y^2}{2}-3\right)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{4}y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}y^6 + y^4 + \frac{2}{3}y^3 - 4y^2\right]_{-2}^{4}$$

$$\boxed{\iint_R xydA = 36}$$

**5) Evalúe $\iint_R (3x+4y^2)\,dA$ donde $R$ es la región en el semiplano superior acotada por las circunferencias $x^2+y^2=1$ ; $x^2+y^2=4$**

La región $R$ se puede describir muy sencillamente en coordenadas polares como:

$R = \{(r,\theta) / \ 1 \le r \le 2\ ;\ \ 0 \le \theta \le \pi\,\}$

Por lo tanto, evaluamos la integral doble mediante coordenadas polares:

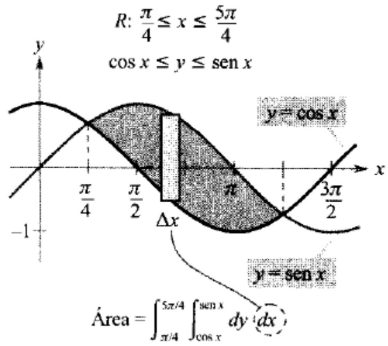
$$\iint_R (3x+4y^2)dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)r\,drd\theta = \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta]_1^2 d\theta = \int_0^{\pi}(7\cos\theta + 15\sin^2\theta)d\theta = \int_0^{\pi}\left[7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta)\right]d\theta$$

$$= \left[7\sin\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{15}{2}\pi$$

$$\boxed{\iint_R (3x+4y^2)dA = \frac{15}{2}\pi}$$

**6) Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $f(x) = sin\ x$ ; $g(x) = cos\ x$; entre $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$**




En primer lugar graficamos la región $R$ y la describimos como región de Tipo I:

$$R = \left\{(x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2\ /\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}\ \ ;\ \ cos\ x \le y \le sin\ x\right\}$$

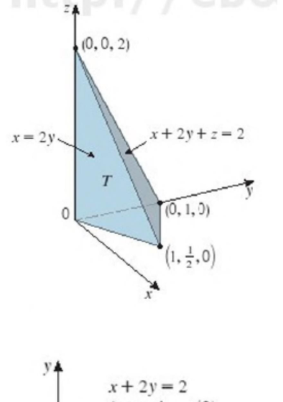
Su área vendrá dada por:

$$A_R = \iint_R dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_{cos\ x}^{sin\ x} dydx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}[y]_{\cos}^{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\boxed{A_R = 2\sqrt{2}}$$

**<u>NOTA IMPORTANTE</u>: todo cálculo del área de una región plano o de una superficie en el espacio deberá dar resultado positivo.**

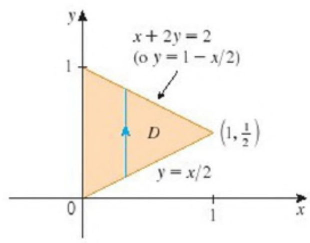
**7) Calcule el volumen del tetraedro acotado por los planos:**
$x+2y+z = 2\ ;\ x = 2y\ ;\ x = 0\ ;\ z = 0$




En primer lugar, graficamos el sólido tridimensional

Vemos que su techo superior lo constituye la función

$z = 2 - x - 2y$




Identificamos luego la región R sobre la que yace en sólido en el plano $(xy)$

Dicha región $R$ se puede expresar como una región Tipo I:

$$R = \left\{(x,y) \epsilon\ \mathbb{R}^2 \ / \ \ 0 \le x \le 1\ ;\ \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

Por consiguiente:

$$V = \iint_R \ (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y)\, dydx = \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

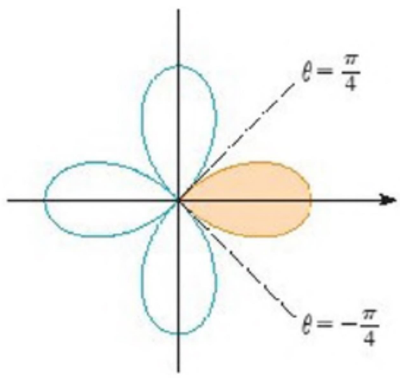
$$\boxed{V = \frac{1}{3}}$$

**<u>NOTA IMPORTANTE</u>: todo cálculo de volúmenes sólidos en el espacio deberá dar resultado positivo.**

**8) Calcular el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuatro hojas** $r = cos\ 2\ \theta$

Graficando la curva, se ve que el pétalo está dado por la región:

$$R = \left\{(r,\theta)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2\ /\ 0 \le r \le cos\ 2\ \theta\ \ ;\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$$




Entonces, el área será:

$$A_R = \iint_R \ dA = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{cos\ 2\ \theta} r\ drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{cos\ 2\ \theta} d\theta =$$

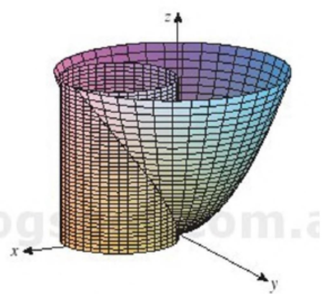
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos^2\ 2\ \theta}{2} d\theta$$

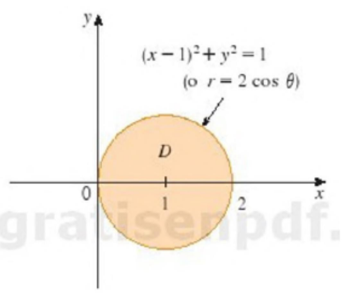
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + cos\ 4\ \theta}{4} d\theta = \left[\frac{\theta + sin\ 4\ \theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{A_R = \frac{\pi}{8}}$$

**9) Calcular el volumen del sólido que yace debajo el paraboloide** $z = x^2 + y^2$ **, arriba del plano** $xy$ **, y dentro del cilindro** $x^2 + y^2 = 2x$.

Si graficamos el sólido resulta




El sólido está arriba del disco $R$ cuya región frontera viene dada por $x^2 + y^2 = 2x$, y luego de completar cuadrados $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Su expresión en coordenadas polares resulta:

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 2r\cos\theta$
$r^2 = 2r\cos\theta$

$$r = 2\cos\theta$$

Así $R$ estará dada por:

$$R = \left\{(r,\theta)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2 /\ 0 \le r \le 2\,cos\,\theta\ ;\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Entonces, el volumen será:

$$V = \iint_R (x^2+y^2)dA = \iint_R (r^2)\,rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\,cos\,\theta} x^3\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\,cos\,\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\,\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)^2\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{(1+cos4\theta)}{2}\right]d\theta$$

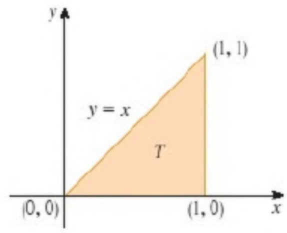
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{cos4\theta}{2}\right)d\theta = \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{sin\,4\theta}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{V = \frac{3}{2}\pi}$$

**10) Calcule el área de la parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ , que está sobre la región triangular en el plano $(xy)$ con vértices $(0{,}0), (1{,}0)\ y\ (1{,}1)$**

En primer lugar graficamos la región $R$ y la describimos como región de Tipo I.

$$R = \{(x,y)\epsilon\,\mathbb{R}^2\ \ /\ \ 0\ \le x \le 1\ \ ;\ \ 0 \le y \le x\}$$




Como $f(x,y) = x^2 + 2y$ tiene derivadas parciales continuas en $R$ por ser una función polinomial, se puede calcular el área de la porción de superficie mediante:

$$A_S = \iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\,dA$$

En este caso:

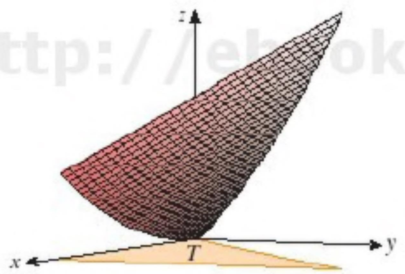
$$f_x(x,y) = 2x\ \ ;\ f_y(x,y) = 2$$

Entonces:

$$A_S = \iint_R \sqrt{(2x)^2 + 2^2 + 1}\,dA = \int_0^1\int_0^x \sqrt{4x^2+5}\ dydx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{4x^2+5}\ dx = \left[\frac{1}{8}.\frac{2}{3}(4x^2+5)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

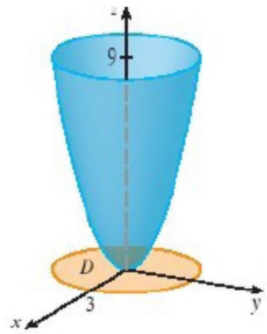
$$\boxed{A_S = \frac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)}$$



**11) Calcule el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ , que está bajo el plano $z = 9$**

La porción de la superficie es la que está sobre el disco centrado en el origen y de radio 3.

Como $z = x^2 + y^2$ tiene derivadas parciales continuas, aplicamos la fórmula para áreas de superficies alabeadas:




$$A_S = \iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\; dA$$
$$= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

En coordenadas polares, $R$ estará dada por:

$R = \{(r,\theta) \epsilon\ \mathbb{R}^2 / \ 0 \le r \le 3\ ;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ con lo que resulta:

$$A_S = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\ r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8}.\frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\left(37\sqrt{37}-1\right)}{12} d\theta$$
$$= \left[\frac{\left(37\sqrt{37}-1\right)}{12}\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{A_S = \frac{\left(37\sqrt{37}-1\right)}{6}\ \pi}$$

**12) Evalúe la integral triple $\iiint_Q\ xyz^2 dV$, donde $Q$ es la caja rectangular dada por:**

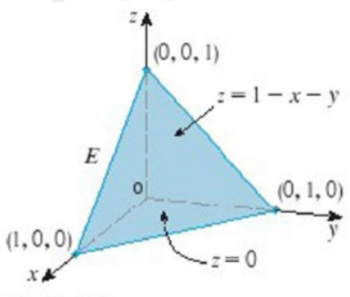
$Q = \{(x,y,z)\ \epsilon\ \mathbb{R}^3\ /\ 0 \le x \le 1\ ;\ -1 \le y \le 2\ ;\ \ 0 \le z \le 3\,\}$

Como $w = f(x,y,z)$ es continua en $R$, entonces es válido el teorema de evaluación mediante integrales iteradas:

$$\iiint_Q\ xyz^2 dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy\, \mathrm{dz} = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_0^1 dy\, \mathrm{dz} = \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy\, \mathrm{dz}$$
$$= \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{-1}^2 \mathrm{dz} = \int_0^3 \frac{3z^2}{4} \mathrm{dz} = \left[\frac{z^3}{4}\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

$$\boxed{\iiint_Q\ xyz^2 dV = \frac{27}{4}}$$

**13) Evalúe la integral triple $\iiint_Q\ z dV$, donde $Q$ es el tetraedro limitado por los siguientes cuatro planos:**

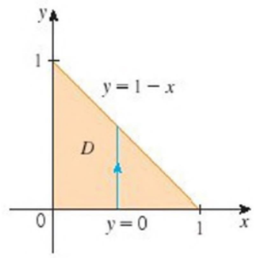



$x = 0\ \ ; y = 0\ \ ; z = 0\ \ ; z + y + z = 1$ en el primer octante.

Cuando tenemos que evaluar una integral triple, es aconsejable realizar dos gráficos:

- uno de la región $Q$ de integración,
- otro de la proyección $R$ del sólido Q en el plano coordenado correspondiente, según el tipo de región de que se trate. En este caso consideraremos la proyección sobre el plano $(xy)$.

$R = \{(x, y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\}$




Entonces, la región de integración resulta ser:

$Q = \{(x, y, z) \epsilon\, \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y) \epsilon\, R\, ; \ \ 0 \leq z \leq 1 - y - x\}$

Como $f(x, y, z) = z$, es una función continua en Q, entonces:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_0^{1-y-x} z\, \mathrm{dz}\right] dA$$

Como $R$ es una región de Tipo I, la integral doble se resolverá consecuentemente y resultará:

$$\iiint_Q z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dydx$$

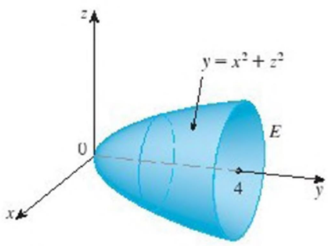
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\, dydx \ = \frac{1}{6}\int_0^1 [(1-x-y)^3]_0^{1-x}\ \mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\ \mathrm{dx} = \left[-\frac{(1-x)^4}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

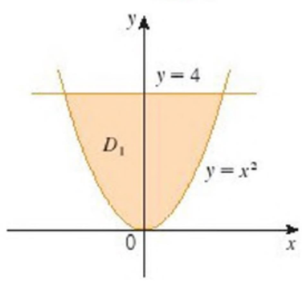
$$\boxed{\iiint_Q z\, dV = \frac{1}{24}}$$

**14) Evalúe** $\iiint_Q \sqrt{x^2+z^2}\, dV$, **donde** $Q$ **es la región limitada por el paraboloide** $y = x^2 + z^2$ **y el plano** $y = 4$.

La región $Q$ se muestra en el gráfico




Si consideramos su proyección en el plano $(xy)$ resulta $R$ la región parabólica mostrada en el segundo gráfico.




$R = \{(x, y) \epsilon\, \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2\, ; \ \ x^2 \leq y \leq 4\}$

De $y = x^2 + z^2$ surgen los límites inferior y superior de la región $Q$

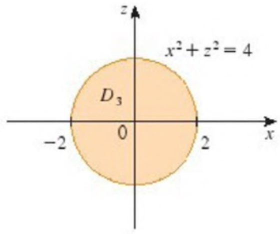
$z = \sqrt{y - x^2}\ \ ; \ \ z = -\sqrt{y - x^2}$

Resultando, por el teorema de evaluación, la siguiente integral iterada:

$$\iiint_Q \sqrt{x^2+z^2}dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2})}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\ dzdydx$$

Esta expresión, si bien correcta, es de difícil resolución.

Si en lugar de este planteo consideramos a la región $Q$ proyectada sobre el plano $(xz)$, entonces la región $R$ resulta el disco circular centrado en el origen y de radio 2.
Además, la frontera izquierda de la región $Q$ será el paraboloide $y = x^2+z^2$ y la frontera derecha el plano $y = 4$




Entonces resulta la región $Q$ descripta por:

$Q = \{(x,y,z)\epsilon\ \mathbb{R}^3\ /\ (x,z)\epsilon\ R\ ;\ \ x^2+z^2 \le y \le 4\}$

La integral iterada será ahora:

$$\iiint_Q \sqrt{x^2+z^2}dV = \iint_R \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{dy}\right]dA = \iint_R \left[y\sqrt{x^2+z^2}\right]_{x^2+z^2}^{4} dA$$
$$= \iint_R (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA$$

La región $R$ puede ser descripta en coordenadas cartesianas como:

$$R = \left\{(x,z)\epsilon\ \mathbb{R}^2/ -2 \le x \le 2\ ;\ -\sqrt{2-x^2} \le z \le \sqrt{2-x^2}\right\}$$

Resultando la integral iterada:

$$\iint_R (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dzdx$$

Nuevamente resulta una integral iterada de cierta complejidad, pero por tratarse $R$ de un disco circular en el plano $(xz)$ centrado en el origen, su descripción se simplifica recurriendo a coordenadas polares en ese plano:

$$R = \{(r,\theta) \in R^2/\ 0 \le r \le 2\ ;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Con:

$$x = r\cos\theta\ \ ; z = r\sin\theta\ ; r^2 =\ x^2+z^2$$

Resultando:

$$\iint_R (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)r\ rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r^2-r^4)drd\theta$$

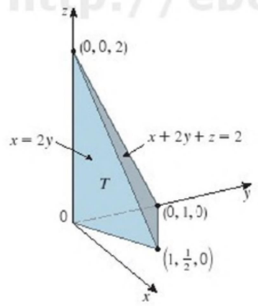
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{64}{15}d\theta = \left[\frac{64}{15}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{128}{15}\ \pi$$

$$\boxed{\iiint_Q \sqrt{x^2+z^2}dV = \frac{128}{15}\ \pi}$$

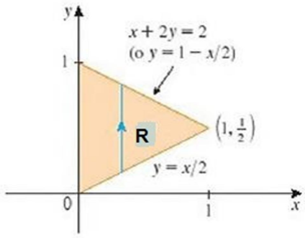
**15) Utilice una integral triple para calcular el volumen del tetraedro acotado por los planos** $x+2y+z=2$ ; $x=2y$ ; $x=0$ ; $z=0$

(Nótese la similitud con ejercicio 7)

El tetraedro se muestra en el siguiente gráfico:




Su proyección sobre el plano $(xy)$ es la siguiente región R:




Entonces, la región de integración resulta ser: $Q=\{(x,y,z)\epsilon\ \mathbb{R}^3\ /\ (x,y)\epsilon\ R\ ,\ 0\le z\le 2-x-2y\}$

Con $R=\left\{(x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2\ /\ 0\le x\le 1\ ;\ \ 0\le y\le 1-\frac{x}{2}\right\}$

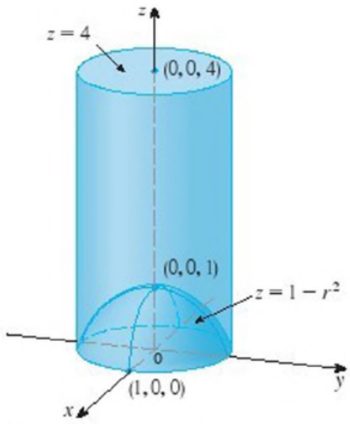
$$V=\iiint_Q dV=\iint_R \left[\int_0^{2-x-2y} dz\right] dA=\int_0^1\int_0^{1-\frac{x}{2}}\int_0^{2-x-2y} dzdydx$$

y resolviendo resulta:

$$\boxed{V=\iiint_Q dV=\frac{7}{12}}$$

**16) Calcule la integral triple** $V=\iiint_Q \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ **en la región que se encuentra dentro del cilindro** $x^2+y^2=1$, **por debajo del plano** $z=4$, **y por encima del paraboloide** $z=1-\ x^2-y^2$.

La región $Q$ se muestra en el siguiente gráfico:




En coordenadas cilíndricas, la ecuación del cilindro es $\mathrm{r}=1$, y la del paraboloide es $z=1-r^2$.

Por lo tanto $Q$ resulta descripta muy sencillamente en coordenadas cilíndricas:

$$Q=\{(r,\theta,z)\in R^3/\ 0\le r\le 1\ ;\ \ 0\le\theta\le 2\pi\ \ ;\ \ 1-r^2\le z\le 4\}$$

Entonces la integral triple resulta:

$$\iiint_Q \sqrt{x^2+y^2}\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 r\,r\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 [r^2z]_{1-r^2}^4\,drd\theta\ =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{6}{5} d\theta = \left[\frac{6}{5}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{12}{5}\pi$$

$$\boxed{\iiint_Q \sqrt{x^2+y^2} dV = \frac{12}{5}\pi}$$

**17) Calcule la integral triple $\iiint_Q e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$ , donde $Q$ es una esfera centrada en el origen de coordenadas, de radio unitario.**

Por las características de la región de integración, recurrimos a coordenadas esféricas. La región $Q$ queda determinada por:

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi) \in R^3 \ / \ 0 \le \rho \le 1 \ ; \ 0 \le \theta \le 2\pi \ ; \ 0 \le \phi \le \pi\}$$

Además, se cumple $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

Entonces, la integral triple en coordenadas esféricas se calcula mediante:

$$\iiint_Q e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\ \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{e^{\rho^3}}{3}\sin\phi\right]_0^1 d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e-1}{3}\sin\phi\, d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{e-1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2(e-1)}{3} d\theta = \left[\frac{2(e-1)}{3}\theta\right]_0^{2\pi}$$

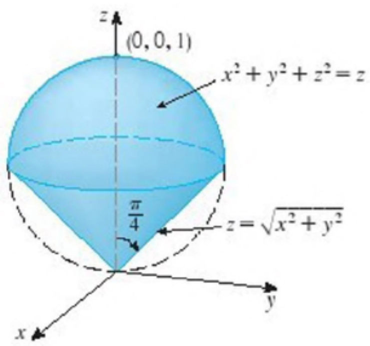
$$\boxed{\iiint_Q e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = = \frac{4}{3}\pi(e-1)}$$

Si hubiéramos planteado la integral en coordenadas cartesianas, hubieran resultado las siguientes integrales iteradas, de complicada resolución:

$$\iiint_Q e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dzdydx$$

**18) Calcule el volumen del sólido que yace arriba del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$**

Graficamos el sólido:




La ecuación del cono en coordenadas esféricas es:

$\rho\ cos\ \phi = \sqrt{(\rho\ sin\ \phi\ cos\theta)^2 + (\rho\ sin\ \phi\ sin\theta)^2} = \rho\ sin\ \phi$
$cos\ \phi = \ sin\ \phi$ , es decir $\phi = \frac{\pi}{4}$

La ecuación de la esfera en coordenadas esféricas será:

$\rho^2 = \rho\ cos\ \phi$ , es decir $\rho = \ cos\ \phi$

La descripción de $Q$ en coordenadas esféricas resulta:

$$Q = \left\{(\rho, \phi, \theta) \in R^3 \;/\; 0 \le \rho \le cos\ \phi\ ;\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\ ;\ \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

Entonces, la integral triple en coordenadas esféricas se calcula mediante:

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{cos\ \phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\right]_0^{cos\ \phi} d\phi d\theta$$

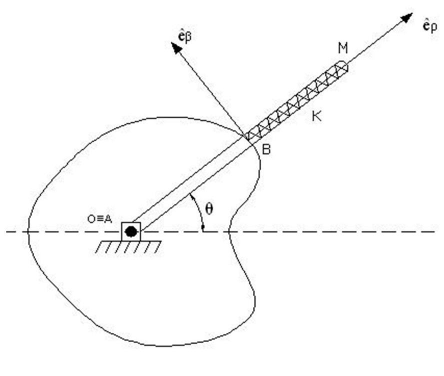
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{cos^3\ \phi}{3}\sin\phi\, d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{cos^4\ \phi}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{16}d\theta = \left[\frac{1}{16}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{V = \iiint_Q dV = \frac{\pi}{8}}$$

# 4. *Ejercicios de aplicación técnica*

**1. Mecanismo de leva y seguidor.**

El dispositivo de la figura esquematiza un mecanismo de leva y seguidor, utilizado para la conversión de movimientos rotatorios en movimientos alternativos rectilíneos o vice-versa. La leva tiene el perfil de un Caracol de Pascal, cuya ecuación polar es del tipo: $r(\theta) = b - c\ cos\theta$ , con b > c. El seguidor está obligado a permanecer en contacto con la leva por acción del resorte.




Calcularemos el área encerrada por el perfil de la leva utilizando coordenadas polares, si b = 4 y c = 2. Por lo tanto la ecuación polar de la curva es:

$$\boldsymbol{r(\theta) = 4 - 2\ cos\ \theta}$$

Caracterizamos la región R:

$$\boldsymbol{R = \{(r, \theta) \in R^2 /\ 0 \le r \le 4 - 2\ cos\theta\ ;\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}}$$

$$\boldsymbol{A_L} = \iint_R dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{4-2\ cos\theta} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right]_0^{4-2cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4 - 2cos\theta)^2\ d\theta =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(16-16cos\theta+4\,cos^2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[16-16cos\theta+2(1+cos2\theta)]d\theta\ =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(18-16cos\theta+2cos2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\,[18\theta+16sen\theta+sen2\theta]\Big|_0^{2\pi}=\boldsymbol{18\pi}$$

**2. Hélice de tres palas.**

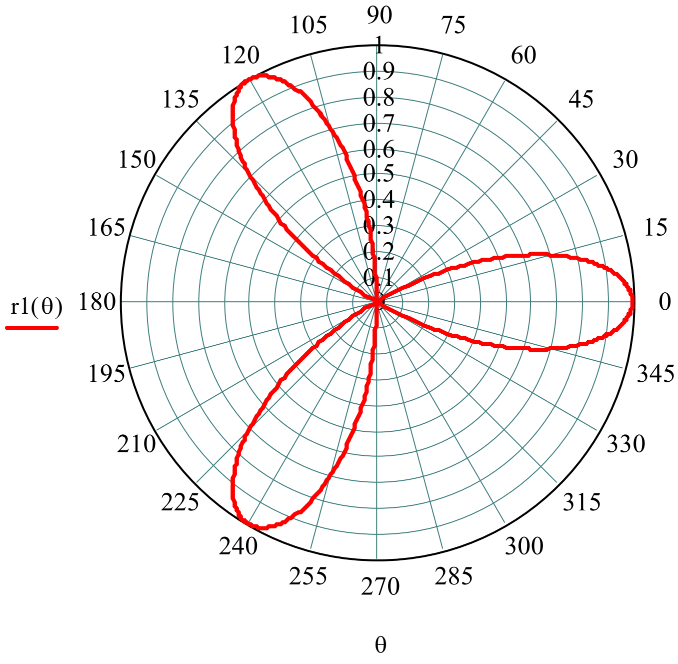
La figura esquematiza una hélice de tres palas apta para uso aeronáutico. La ecuación polar del perfil (o frontera) de la región R es: $\boldsymbol{r(\theta)=1\ cos\theta}$ . La circunferencia exterior de la gráfica representa el máximo valor posible de la variable radial. Se trata de calcular el área total de la hélice, para lo que es suficiente calcular el área de un solo lóbulo y multiplicarla por tres.

**Nota: ejercicio resuelto mediante el uso de Mathcad 14.**

$r1(\theta) := \cos(3\theta)$

$r1(0) = 1$

$r1\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$




**Área de un lóbulo =** $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\cos(\theta)} r\ dr\ d\theta \rightarrow \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

**3. Masa de una lámina.**

Una lámina tiene la forma de un triángulo isósceles con catetos de longitud **a** coincidentes con los ejes del sistema de coordenadas. Calcular su masa suponiendo que la densidad superficial en un punto P del triángulo es proporcional al cuadrado de la distancia del punto P al origen de coordenadas.

La frontera del triángulo estará dada por las siguientes rectas: x = 0 ; y = 0 ; x + y = a.

La densidad superficial de masa está dada por la función: $\delta(x,y) = k(x^2+y^2)$ siendo k una constante de proporcionalidad.

$$m = \iint_R k(x^2+y^2)\,dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2+y^2)dydx = \int_0^a k\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} dx =$$

$$= k\int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right]dx = k\int_0^a \left[ax^2 - x^3 + \frac{1}{3}(a-x)^3\right]dx =$$

$$= k\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}(-1)\frac{(a-x)^4}{4}\right]_0^a = k\left[\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{12}\right] = \frac{1}{6}ka^4$$

**4. Masa de un sólido.**

Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto, con radio de la base ***a*** y altura ***h***. Calcular su masa suponiendo que la densidad volumétrica en un punto P del cilindro es directamente proporcional a la distancia del punto a la base inferior del cilindro, coincidente con el plano (x, y).

Por lo indicado en el enunciado la densidad del cilindro está dada por: $\delta(x,y,z) = kz$.

El cilindro tiene simetría respecto de los planos coordenados (x, z) y (y, z). Por lo tanto se puede aprovechar dicha simetría calculando la masa de la porción de cilindro ubicada en el primer octante y multiplicar el resultado por 4.

De esta manera dicha porción queda definida mediante:

$$Q: \left\{(x,y,z) \in R^3 / \ 0 \le x \le a \, ; 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \ ; \ 0 \le z \le h\right\}$$

$$m = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h kzdzdydx = 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^2}{2}dydx = 2k\,h^2 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= 2kh^2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 arcsen\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = 2k\frac{h^2}{2}a^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi k h^2 a^2}{2}$$

**En la resolución de este ejemplo se utilizó el sistema de coordenadas cartesianas. El alumno verificará si la resolución se simplifica en caso de utilizarse el sistema de coordenadas cilíndricas.**

**5. Centro de masa y Momentos de inercia del cilindro estudiado en el inciso anterior.**

a) Cálculo del centro de masa.
Por razones de simetría axial, dado que el cilindro tiene su eje coincidente con el eje vertical y la densidad volumétrica es sólo función de la distancia z a la base, coincidente con el plano (x, y), se puede concluir que el centro de masa se encontrará en alguna posición sobre el eje z.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_Q \ z \ \delta(x,y,z)\ dV}{\iiint_Q \ \delta(x,y,z)\ dV}$$

En primer término calculamos la integral triple del numerador, usando el mismo criterio que se aplicó en el cálculo de la masa.

$$\iiint_Q \ z \ \delta(x,y,z)\ dV =$$

$$= 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z\, kz\ dz\ dy\ dx =$$

$$= 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[k\ \frac{z^3}{3}\right]_0^h dydx = 4k\frac{h^3}{3}\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$$

Como la integral doble que queda por resolver es la misma que la resuelta en la determinación de la masa del cilindro, su solución es la misma. Por lo tanto:Escriba aquí la ecuación.

$$\iiint_Q \ z \ \delta(x,y,z)\ dV = \ 4k\frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 arcsen\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \frac{4}{3}kh^3\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{2} = \frac{\pi k h^3 a^2}{3}$$

Por lo tanto el centro de masa estará ubicado en la siguiente posición:

$$\bar{z} = \frac{\pi k h^3 a^2/3}{\pi k h^2 a^2/2} = \frac{2}{3}h$$

b) Calculo del momento de inercia respecto del eje de simetría, coincidente con el eje z.

$$I_z = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h (x^2+y^2)\ kz\ dz\ dy\ dx = 4k\ \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[(x^2+y^2)\frac{z^2}{2}\right]_0^h dydx =$$

$$= 2kh^2\ \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2) dydx = \ 2kh^2 \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx$$

$$= 2kh^2 \int_0^a \left[x^2\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}\right] dx$$

Resolviendo la integral por tablas de integración se obtiene: $I_z = k\pi h^2 a^2/4$

**El alumno verificará como se simplifica el cálculo anterior si se utilizaran las coordenadas cilíndricas, en lugar de las coordenadas cartesianas utilizadas en la determinación anterior.**

# 5. *Ejercicios propuestos*

**1. Escribir las ecuaciones de las curvas que limitan los recintos a los que se extienden las siguientes integrales dobles y graficar dichos recintos:**

a) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dxdy$

b) $\int_{1}^{3}\int_{x/3}^{2x} f(x,y)dydx$

c) $\int_{1}^{2}\int_{x^2}^{x+4} f(x,y)dydx$

d) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dydx$

2. **Escribir las ecuaciones de las curvas que limitan los recintos a los que se extienden las siguientes integrales dobles, graficar dichos recintos y cambiar el orden de integración:**

a. $\int_{0}^{4}\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx$

*b.* $\int_{0}^{1}\int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx$

3. **Determinar los límites de integración para $\iint_R f(x,y)dxdy$ si la región $R$ en el plano $(xy)$ está limitada por:**

a) $y^2 - x^2 = 1$ y por las rectas $x = 3$ ; $x = -3$

b) $x^2 + y^2 = a^2$

c) $R$ es un rectángulo cuyos vértices son: $A(0,0)$; $B(3,0)$; $C(3,2)$ y $D(0,2)$

d) $R$ es un triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$; $B(2,0)$ y $C(2,2)$

4. **Calcular las siguientes integrales identificando el tipo de región y sistema de coordenadas usado:**

$a)$ $\int_{0}^{2}\int_{0}^{1}(x^2 - y^2)dxdy$

$b)$ $\int_{-3}^{3}\int_{y^2-4}^{10}(x+2y)dxdy$

c) $\int_{0}^{\pi}\int_{asen\theta}^{a} r\, drd\theta$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3cos\theta} r^2\, sen^2\,\theta\; drd\theta$

5. **Calcular, mediante el uso de la integral doble, el área de la región indicada:**

a) Región limitada por: $y = x^2$ ; $y = 2x + 3$

b) Región limitada por: $x^2 + y^2 = 9$ ; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) Región limitada por: $y = x^{1/2}$ ; $y = -x$ ; $x = 1$ ; $x = 4$

d) Región limitada por: $x = y^2$ ; $y - x = 2$ ; $y = -2$ ; $y = 3$

e) Región limitada por: $x - y + 1 = 0$ ; $7x - y - 17 = 0$ ; $2x + y + 2 = 0$

**6. Usando integrales dobles, calcular el volumen del sólido:**

a) Limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$

b) Limitado por $y^2 = x$ ; $y + z = 2$ ; $z = 0$ ; $y = 0$ (primer octante).

c) Contenido en el primer octante y limitado por $x^2 + z^2 = 9$ ; $y = 2x$ ; $y = 0$ ; $z = 0$

d) Limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ; por el plano $x + z = 1$ y por los planos $x = 0$ ; $y = 0$ ; $z = 0$

e) Contenido en el primer octante y limitado por $z = 4 - x^2$ ; $x + y = 2$ y los planos coordenados

f) Limitada por la superficie $z = x + y + 2$ ; el plano $z = 0$ ; la superficie cilíndrica $y^2 - 4x = 0$ y el plano $x = 2$

g) Limitado por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$, el plano $y = 1$, la superficie parabólica $y = x^2$, sobre el plano $z = 0$, en el primer octante.

**7. Coordenadas Polares**

a) Calcular el área del cardioide: $r = a(1 - cos\theta)$. Representar gráficamente.

b) Calcular el área comprendida entre los círculos: $r = a.\cos\theta$ ; $r = b\sin\theta$ con $b > a$

c) Calcular el área de la Lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2\cos 2\theta$

d) Calcular el área interior a la curva $r = 2\sin 3\theta$ y exterior a $r = 1$ en el primer cuadrante.

e) Calcular el volumen de la esfera de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

f) Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante y acotado por las superficies $z = r$ y el cilindro $r = 3\,sen\,\theta$.

g) Calcular el volumen del sólido limitado por los cilindros de ecuaciones:
$x^2 + y^2 = a^2$ ; $x^2 + y^2 = (a-1)^2$ ; por el plano de ecuación $z = 1$ y por los planos coordenados .

**8. Hallar el área de las superficies en el espacio que en cada caso se indican:**

a) Calcular el área de la porción del plano de ecuación: $x + y + z = 1$ comprendida entre los planos $x = 0$ ; $y = 0$ ; $z = 0$

b) Calcular el área de la porción de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ debajo de $z = 2$

c) Calcular el área del Paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ situado entre los planos $z = 0$ y $z = 1$

d) Calcular el área de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ limitada por los planos $z = 0$ y $z = x$ en el primer cuadrante.

e) Calcular el área de la corona esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ubicada entre los planos $x = 3$ y $z = 5$.

f) Calcular el área de la parte de la superficie $z = 2 - (x^2 + y^2)$ contenida en el primer octante (utilizar coordenadas polares).

**9. Integrales triples en coordenadas cartesianas. Hallar el volumen de los siguientes sólidos:**

a) Sólido limitado por $x + y + z = 1$ y los planos coordenados

b) Sólido limitado por las superficies de ecuación $z = 4 - x^2$ ; $y = 6$ ; $x = 0$ ; $z = 0$

c) Sólido acotado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $y = z = 4$ ; $z = 0$

d) Solido acotado por las superficies cilíndricas $z = 3x^2$ ; $z = 4 - x^2$ y los planos $y = 0$ ; $z + y = 6$

e) Sólido limitado por $z = 6 - x^2$ ; el plano $y = 8$ y los planos coordenados

f) Sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ ; $z = 2 - x - y$ ; y los planos coordenados.

**10. Integrales triples en Coordenadas Cilíndricas**

a) Calcular el volumen de una esfera centrada en el origen del sistema de coordenadas y de radio c. Graficar sólo el sector de esfera correspondiente al primer octante.

b) Evaluar la integral cambiando a coordenadas cilíndricas

b1) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2+y^3}} z\, dz\, dy\, dx$

b2) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$

c) Calcular el volumen del sólido limitado por $x = y^2 + z^2$ ; $x = 4$.

**11. Integrales triples en Coordenadas Cilíndricas**

a) Calcular $\iiint_Q x^2 y\, dxdydz$ siendo $Q$ la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

b) Calcular el volumen de la región $Q$ acotada arriba por la esfera ρ = a, y abajo por el cono $\emptyset = c$ , donde $0 < c < \frac{\pi}{2}$

c) Evaluar la siguiente integral $\iiint_Q e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$ donde $Q$ está limitado por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y por el plano $(xy)$

d) Evaluar la integral cambiando a coordenadas esféricas

$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$

**12. Masa, centro de masa y momentos de inercia de una lámina**

a) Calcular las coordenadas del centro de masa de una placa que tiene la forma de la región $R$ del plano $xy$ acotado por las curvas $x = y^2$ ; $x = 4$. La densidad superficial en un punto $P(x, y)$ de la placa es proporcional a la distancia del punto al eje $y$.

b) Calcular las coordenadas del centro de masa de la lámina limitada por:

$$x = 0 \; ; \; x = y \; ; \; y = 1; \; y = 2.$$

La densidad superficial de masa de la placa es $\delta(x, y) = x^2$ . Determinar además los momentos de inercia de la misma lámina.

c) Calcular los momentos de inercia de la siguiente lámina:

$$y = x^{1/2} \; ; x = 9 \; ; \; y = 0 \; ; \delta\,(x, y) = x + y$$

d) Calcular los momentos de inercia de la siguiente lámina:

$$y = \sin x \; ; \; y = 0 \; ; \; x = 0 \; ; \; x = \pi \; ; \; \delta\,(x, y) = y$$

# 6. *Bibliografía*

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski.
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Matemática Superior para Ingenieros y Físicos, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff.